Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 517.957(043) Қолжазба құқығында

ШӘКІР АЙДОС ҒАНИЖАНҰЛЫ

Сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін кері және тура есептер

8D05401 - Математика
білім беру бағдарламасы

Философия докторы PhD
ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
Хомпыш Х.
ф.-м.ғ.к., доцент

Шетелдік ғылыми кеңесші
Х.В. де Оливейра
PhD, профессор
Алгарве университеті, Португалия

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2023

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда төмендегі стандарттарға сілтемелер қолданылды:

МЕМСТ 7.1-84. Ақпарат, кітапхана ісі және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Құжаттың библографиялық сипаттамасы. Жалпы талапттар және құрастыру ережелерей;

МЕМСТ 7.9-95 (ISO 214-76). Ақпарат, кітапхана ісі және баспа ісі бойынша стандарттар жүйесі. Реферат және аңдатпа. Жалпы талаптар;

ҚР. МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. негізгі ережелер;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және пішімдеу ережелері;

МЕМСТ 8.417-81. Өлшем бірлігін қамтамасыз етудің мемлекеттік жүйесі. Физикалық шамалардың өлшембірлігі.

КІРІСПЕ

Математиканың ең қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының бірі - сұйық механикасының әр алуан есептерін математикалық талдау. Қазіргі кезде математика, физика, механика, биология және мұнай-газ өнеркәсібі, медицина, су ресурстары және тағы да басқа ғылым мен техниканың салаларының дамуы көптеген ньютондық және ньютондық емес сұйық механикасы процестерін қатаң жан-жақты математикалық зерттеуді және идеялық тұрғыдан дамытуды талап етуде. Себебі аталған салаларда көптеген обьектілер осындай қасиеттерге ие.

Зерттеу өзектілігі.Ежелгі заманнан бері сұйықтың ашық және жабық арналардағы қозғалысы, сондай-ақ ыдыстың қабырғасына немесе сұйықпен ағып жатқан қатты денеге күштік әсер етуін зерттеу математикадағы көптеген әрі сан алуан мәселелердің көзі болып табылады. Сұйықтың қозғалыс заңдылығының қарапайым математикалық модельдерін зерттегенде көптеген мәселелер туындайды және олардың басым бөлігі күні бүгінге дейін шешілмей келеді.

Бұл диссертациялық жұмыс күрделі реологиялық қасиеттері ескерілген сығылмайтын біртекті және біртекті емес сұйық ағындарын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулері үшін жаңа қойылымды тура және кері есептердің әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы мәселелерін зерттеуге арналған. Барлық мүмкін болатын қасиеттері ескерілген ньютондық және ньютондық емес сұйықтар ағынын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері және тура есептерді зерттеу теориялық тұрғыдан да, практикалық тұрғыдан да маңызды әрі өзекті болып табылады.

Сұйық механикасы туралы ең алғашқы ғылыми трактаттар біздің заманымызға дейінгі 250 жылдары ежелгі Грекияда пайда болды. Архимед (287-212 б.з.д.) өзінің екі бөлімнен тұратын "Жүзетін денелер туралы"атты шығармасында сұйықта жүзетін дененің тепе-теңдігі сұрақтарын қарастырған еді. Сұйық қозғалысы туралы "гидродинамика"ғылымының пайда болуы, сұйық пен газ ағынының қозғалысын өзіндік тәжірибелер арқылы зерттеген Л. Да Винчи (1452-1519), С. Стеван (1548-1620), Г. Галилей (1564-1642), Б. Паскаль (1588-1651), Э. Торричелли (1608-1647), И. Ньютон (1643-1727) және тағы басқа да ғалымдардың есімімен тікелей байланысты. Мәселен, 1643 жылы Э. Торричелли саңылаудан ағып жатқан сұйықтың жылдамдығы саңылау үстіндегі биіктікке тура пропорционалдығы туралы формуласын қорықтан еді. Ал, 1653 жылы Б. Паскаль тек сұйық пен газдардың қозғалысы барысында қысымның тұрақты болуы туралы заңды тұжырымдады. И. Ньютон жанама кернеу мен жылдамдық градиентінің сызықты тәуелдігі жөнінде заңын ашты. Алайда, сұйық механикасының ғылыми негізін XVIII ғасырдың ғалымдары Д. Бернулли (1700-1783), Л. Эйлер (1707-1783), Ж.Л. Даламбер (1717-1783) қалаған еді. Д. Бернуллидің көпжылдық ғылыми ізденістерінің нәтижесінде 1738 жылы жарық көрген "Гидродинамика"атты монографиясында энергияның сақталу заңының салдары ретінде сығылмайтын сұйықтың стационарлық ағысының теңдеуін жария етті. Ал Л. Эйлер 1757 жылы Д. Бернуллидің нәтижесін сығылатын сұйық (газдар) үшін қорытындылап, сонымен қатар, идеал сұйықтың қозғалыс теңдеуін тұжырымдаған еді. Одан кейін оның жұмысын Ж.Л. Лагранж (1736-1813) жалғастырды. Ж.Л. Даламбер сұйықтың тепе-теңдігі мен қозғалысы туралы өзінің трактаттарын жазды. А. Навье (1785-1836) молекулалардың өзара әсерлесуі гипотезасының көмегімен тұтқыр сұйықтың қолғалысының теңдеуін тұжырымдады. Д. Стокс (1819-1903) аксиоматикалық негізде тұтқыр сұйықтың қозғалыс теңдеуін қорытып шығарды. О. Рейнольдс (1842-1912) тұтқыр сұйықтың қозғалысын зерттей отырып, оның ламинарлы және турбулентті ағысы түсінігін енгізді, сонымен қатар, ламинарлы ағыс түрінен турбулентті ағыс түріне және керісінше қалай жылдам өтуге болатынын көрсетті. Л. Больцман (1844-1906) газ немесе сұйық бөлшектерінің статистикалық үлестірімін сипаттайтын заңы арқылы гидродинамика теңдеулерінің кинетикалық негіздемесін жасады.

Жоғарыда есімдері аталған және басқа да ғалымдар бүгінгі таңдағы негізгі математикалық модельдерді құрып әрі шын мәнінде классикалық гидродинамиканың түпнегізін жасаған еді. Сондай-ақ, сұйықтың физикалық ерекшелігін сипаттау үшін кеңістіктік пен уақыттық айнымалыларға тәуелді сұйықтың жылдамдығы мен қысымы қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулер жүйесін алды.

Шенелген $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ облыста біртекті емес сығылмайтын сұйықтың $[0, T], T > 0$ уақыт аралығында қозғалысы келесі Коши теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\frac{\partial\left(\rho \mathbf{u}\right)}{\partial t} + \boldsymbol{div}\left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}\right) + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{div}\, \sigma + \rho \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{1}$$

$$\boldsymbol{div}\, \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{2}$$

$$\rho_t + \boldsymbol{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \tag{3}$$

мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), ..., u_d(\mathbf{x}, t))-$ сұйықтың жылдамдық векторы, $p(\mathbf{x}, t)-$ сұйықтың қысымы, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), ..., f_d(\mathbf{x}, t))-$ сұйыққа әсер етуші сыртқы күштердің тығыздығы, $\rho(\mathbf{x}, t)-$ сұйықтың тығыздығы, $\sigma-$ кернеу тензорының девиаторы және $\operatorname{tr} \sigma = 0$. Ал, $\boldsymbol{div}\, \sigma$ векторы - ∇ (набло) векторы мен кернеу тензорының девиаторы арасындағы скаляр көбейтінді, оның компоненттері

$$\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, ..., \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{dj}}{\partial x_j}\right).$$

Кернеу тензорының девиаторын (1)-(3) теңдеулер жүйесінің белгісіздері арқылы өрнектеу үшін кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас қолданылады. Деформация тензорын ε арқылы белгілейді, ал оның компоненттері келесі өрнекпен анықталады

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{d}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Мұндай кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас *реологиялық* қатынас деп аталады.

Егер кернеу тензорының девиаторы $\sigma \equiv 0$ болса, онда идеал сығылмайтын сұйықтың қозғалысын сипаттайтын Эйлер теңдеулер жүйесі тұжырымдалады

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \boldsymbol{div}\,(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \operatorname{grad} p = \rho\mathbf{f}, \ \ (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \tag{4}$$

$$\boldsymbol{div}\,\mathbf{u} = 0, \ \ (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \tag{5}$$

$$\rho_t + \boldsymbol{div}(\rho\cdot\mathbf{u}) = 0 \tag{6}$$

Алайда, соңғы бір жарым ғасырдан астам уақытта гидродинамика саласында негізінен ньютондық сұйықтың қозғалысы зерттелініп келеді. Ньютондық сұйықтың қозғалысының реологиялық қатынасы

$$\sigma = 2\nu\varepsilon \tag{7}$$

өрнегімен анықталады, мұндағы $\nu-$ тұтқырлықтың кинематикалық коэффициенті. Кернеу тензорының девиаторы (7) өрнек бойынша мәнін (1)-(3) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \boldsymbol{div}\,(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \operatorname{grad} p = \nu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}, \ \ (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \tag{8}$$

$$\boldsymbol{div}\,\mathbf{u} = 0, \ \ (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \tag{9}$$

$$\rho_t + \boldsymbol{div}(\rho\cdot\mathbf{u}) = 0 \tag{10}$$

Навье-Стокс теңдеулер жүйесі қорытылады. Бірақ, 1971 жылы Павловский жұмысында [1] әлсіз концентрлі су-полимерлі қоспаларының моделі үшін кернеу тензорының девиаторын (7) өрнектің орнына келесі түрде анықтады

$$\sigma = 2\nu\varepsilon + 2\varkappa\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \ \ \nu > 0, \ \varkappa > 0, \tag{11}$$

мұндағы $\varkappa-$ретардация уақыты немесе деформацияның релаксация уақыты. Кернеу тензорының девиаторы (11) өрнек бойынша мәнін (1)-(3) теңдеулер жүйесіне қойғанда

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial t}+\boldsymbol{div}\left(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\right)+\operatorname{grad}p=\nu\Delta\mathbf{u}+\varkappa\Delta\mathbf{u}_t+\rho\mathbf{f},\quad(\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T],\tag{12}$$

$$\boldsymbol{div}\,\mathbf{u}=0,\quad(\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T],\tag{13}$$

$$\rho_t+\boldsymbol{div}(\rho\cdot\mathbf{u})=0\tag{14}$$

тұтқыр сығылмайтын біртекті емес сұйықтың релаксациялық қасиеттерін сипаттайтын Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулер жүйесі тұжырымдалады. Ең алғаш мұндай теңдеулер жүйесі туралы туралы 1966 жылы Мәскеуде өткен математиктердің халықаралық конгрессінде О.А. Ладыженская баяндамасында [2] айтылып, Навье-Стокс жүйесінің регуляризациясы ретінде ұсынылды.

Сөйтіп, Кельвин-Фойгт сұйығының математикалық моделін негізге ала отырып, релаксация уақыты дискретті үлестірілген және кешігу уақытынан тұратын *сызықты тұтқыр серпімді сұйықтың* феноменологиялық теориясы қалыптасты. Осындай қасиеттерге ие $L-$ретті Кельвин-Фойгт сұйықтығының реологиялық қатынасы келесі өрнекпен анықталады

$$\left(1+\sum_{k=1}^{L}\lambda_k\frac{\partial^k}{\partial t^k}\right)\sigma=2\left(\nu+\sum_{k=1}^{L+1}\varkappa_k\frac{\partial^k}{\partial t^k}\right)\varepsilon,\ \lambda_L,\mu_{L+1}>0,\quad L=1,2,...,\tag{15}$$

мұндағы λ_k-релаксация уақыты, $\varkappa_k-$кешігу уақыты.

Енді соңғы өрнектен σ кернеу тензорының девиаторын өрнектеу үшін оған және ε деформация тензорына, сондай-ақ, олардың уақыт бойынша туындыларына бастапқы шарттар қажет. Ол бастапқы шарттар келесі өрнекпен анықталады

$$\left.\frac{\partial^k\varepsilon}{\partial t^k}\right|_{t=0}=g_k(x),\quad x\in\Omega,\quad k=0,...,L;\tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial^k\sigma}{\partial t^k}\right|_{t=0}=h_k(x),\quad x\in\Omega,\quad k=0,...,L-1.\tag{17}$$

Егер $L=1$ жағдайда (15) өрнекке t айнымалысы бойынша Лаплас түрлендіруін қолданып және (16), (17) бастапқы шарттарда $g_k=0,h_k=0$ деп ұйғарсақ, онда кернеу тензорының девиаторы

$$\sigma=2\varkappa\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+2\nu\varepsilon+2\beta\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon d\tau,\ \alpha,\,\beta>0,\tag{18}$$

өрнегімен тұжырымдалады. Егер (18) өрнекте $\beta = 1, \alpha = 1$ және e^{-t} функциясының орнына жалпы түрде $K(t)$ функциясын қарастырып, шыққан нәтижені (1)-(3) Коши теңдеулер жүйесіне қойғанда, сәйкесінше, келесі теңдеулер жүйесі алынады

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} &+ \boldsymbol{div}\,(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \operatorname{grad} p = \\ &\nu\Delta\mathbf{u} + \varkappa\Delta\mathbf{u}_t + \int\limits_0^t K(t-\tau)\Delta\mathbf{u}d\tau + \rho\mathbf{f}, \quad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \tag{20}$$

$$\rho_t + \boldsymbol{div}(\rho\cdot\mathbf{u}) = 0. \tag{21}$$

Бұл (19)-(21) теңдеулер жүйесі жоғарыда атап өткендей біртекті емес ньютондық емес сұйықтың ағынын сипаттайды. Егер қарастырылып отырған сұйық біртекті, яғни тұрақты тығыздықты ($\rho = const$) болса, онда мұндай сұйықтың қозғалысы $\rho = 1$ дербес жағдайда

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &+ (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \operatorname{gard} p = \\ &\nu\Delta\mathbf{u} + \varkappa\Delta\mathbf{u}_t + \int\limits_0^t K(t-\tau)\Delta\mathbf{u}d\tau + \mathbf{f}, \quad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \end{aligned} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \tag{23}$$

теңдеулер жүйесімен тұжырымдалады. Соңғы (22)-(23) теңдеулер жүйесін интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі деп атайды. Алайда, Звягин мен Турбин [3] атап өткендей, Кельвин де, Фойгт те кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры арасындағы реологиялық қатынасты немесе тұтқыр серпімді сұйық үшін конститутивтік теңдеулер жүйесін ұсынбаған. "Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі"деген атауды ғылымға енгізген және оны зерттеумен қарқынды түрде айналысқан, О.А. Ладыженская ғылыми мектебінің өкілі әрі шәкірті А.П. Осколков еді. Сонымен қатар, (22)-(23) теңдеулер жүйесін ең алғаш зерттеп бастаған А.П. Осколков [4] болғандықтан, кейбір ғалымдардың ғылыми еңбектерінде "Осколков теңдеулер жүйесі"деген атау да кездеседі.

Математиканың сұйық механикасы саласындағы есептерді екі түрге бөлуге болады: тура және кері есептер. Тура есептер әдетте сыртқы күштер, физикалық коэффициенттер және басқа да параметрлер сияқты кейбір деректер берілген табиғи немесе өндірістік процестерді модельдеу мәселелері ретінде түсінуге болады. Кері есептер кез келген қолданбалы тура есептер секілді өмірдегі практикалық қолданыстар мен қажеттіліктерден туындайды [5–7].

Мәселен, кері есептер физикалық құбылыстарды модельдеумен қатар, физикалық процестің белгісіз параметрін қалпына келтіру қажетілігінен туындайды. Олар математикадағы ең маңызды іргелі есептердің бірі болып табылады, өйткені ол тікелей бақылауға қолжетімсіз, есептеу мүмкін емес белгісіз параметрлер туралы мәліметтер береді.

Сондықтан барлық мүмкін болатын қасиеттерді ескере отырып, ньютондық емес сұйық механикасының сызықты және сызықты емес теңдеулері үшін тура және кері есептерді зерттеу маңызды болып табылады. Соңғы бір жарым ғасырда математиктердің сұйық механикасы саласындағы негізгі зерттеу нысаны біртекті және біртекті емес ньютондық сұйықтардың қозғалысын сипаттайтын Навье-Стокс теңдеулері үшін тура есептер болды және олар бойынша көптеген жұмыстар бар. Математикалық тұрғыдан алғанда, бұл тақырыптар бойынша негізгі жұмыстар, Ж. Леренің [8], О.А. Ладыженская [9], Т. Като [10], Р. Темам [11], Ж. Лионс [12], Седов [13], В. да Вейга және Валли [14, 15], Антонцев, Кажихов және Монахов [16], Симон [17], Х. Чой, Х. Ким [18], М. Өтелбаевтың [19, 20], Ш. Смағұловтың, Н. Данаевтың, Н. Темірбековтың [21–23] және т.б. авторлардың еңбектерін атауға болады. Дегенмен, 3D стационарлы емес және сызықты емес Навье-Стокс жүйесінің уақыт бойынша бірмәнді глобальді шешімділігі мәселесі әлі де ашық күйінде қалып отыр [24]. Сондықтан оны Клей математика институты математиканың алтыншы мыңжылдық есебі деп жариялады. Алайда, осы күнге дейін Навье-Стокс және басқа да сұйық механикасы теңдеулері үшін кері есептер жеткілікті түрде зерттелінбеген. Мысалға, ньютондық сұйық механикасының кері есептері бойынша бірнеше мақалаларды атауға болады, мәселен, Прилепко [5], Васин [25], У.У. Әбілқайыров пен С.Е. Айтжанов [26, 27], Дженалиев [28, 29], Фурсиков [30], Чебаторев [31], Накамура [32], Ямамото [33] және ондағы сілтемелердегі жұмыстар. Әйтсе де, соңғы жылдары классикалық сұйық механикасының моделдерімен сипатталмайтын ньютондық емес сұйықтың қозғалысын [3, 34–37] зерттеу математика мен физикада кең тарады. Осындай сұйыққа әртүрлі полимерлік ерітінділер, қоспалар, суспензиялар, қан, битум, жер қыртысы, әлсіз концентрлі сулы полимерлі ерітінділер, кремдер, майлар және басқа да осы сияқты сұйық мысал бола алады. Мұндай ньютондық емес сұйықтың негізгі үлгілерінің бірі – серпімді қасиеттері ескерілген тұтқыр және сығылмайтын ньютондық емес сұйық, олардың біртекті емес қозғалысы (22)-(23) Навье-Стокс-Фойгт жүйесімен сипатталады [3, 38, 39].

Бұл біртекті емес сұйықтың модельдері тіпті тура есептер үшін де математикалық тұрғыдан жеткілікті түрде зерттелмегенін байқауға болады, өйткені олар классикалық сұйық механикасы шығаратын есептерден де күрделі. Мысалға, біртекті сұйыққа арналған еңбектер ретінде, О.Ладыженскаяның, А.П.Осколковтың, Жиков пен Пастухованың, С.Н. Антонцев, Х.В. де Оливейра, Х. Хомпыш, В.Г. Литвинов, В.Г. Звягин, М. Турбин, В.К. Қалантаров, К.Р. Ражогопал, Н.А. Каразеева, Е.В. Юшков, Е. Тити және басқаларының (мысалы, [3,38,40–50] және ондағы сілтемелер) жұмысын атауға болады. Біздің білуімізше, ньютондық емес сұйық механикасы есептеріне кері есептерді зерттеу жоқтың қасы. Мәселен, жады мүшесі жоқ (серпімділік қасиеті ескерілмеген) және тығыздығы тұрақты ($\rho = const$) жағдайлар үшін кері есептерді соңғы жылдары Әбілқайыровтың [51], Кумар [52], Федоров [53,54], Антонцев пен Х. Хомпыштың [55–58] жұмыстарынан және т.б. еңбектерден көруге болады.

Зерттеу мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты біртекті және біртекті емес сұйықтың ағынын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин – Фойгт теңдеулер жүйесі үшін қойылған тура және кері есептердің әлсіз және әлді шешімдерінің глобалды немесе локалды бар болуы мен жалғыздығын теориялық тұрғыдан зерттеу.

Зерттеу нысаны. Біртекті және біртекті емес сұйықтың ағындарын сипаттайтын сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін кері және тура есептер мен p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есептер.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста келесі заманауи әдістердің тиімді комбинациялары қолданылды:
- Заманауи функционалдық әдістер: априорлық бағалаулар әдісі, компактылық әдісі, Соболев кеңістіктері теориясы, үзіліссіз және компакттілі енгізу теоремалары, интерполяциялық теңсіздіктер;
- Фаэдо – Галеркин әдісі;
- монотондылық әдіс;
- функционалдық анализдің энергетикалық функция әдісі;
- тура және кері есептер жалпы теориясы;
- дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы.

Теориялық және практикалық құндылығы. Кері және тура есептер табиғатта, өндірісте немесе түрлі тәжірибелік сынамаларда зерттелетін құбылыстың, үрдістің қажетті сипаттамалары тікелей бақылауға қол жетімсіз немесе ғылыми зерттеулердің жобалық-құрастырмалық әзірлемелері қымбат болған жағдайда қолданылады. Сондықтан сызықтық және сызықтық емес теңдеулер үшін тура және кері есептерді шешудің тиімді әдістерін жасау, әсіресе, тұтқыр серпімді ньютондық және ньютондық емес сұйықтың қозғалыс параметрін қалпына келтіруде, инженерлік эксперименталды зерттеулерді едәуір жеңілдетуде және алынған нәтижелердің дәлдігін арттыруда маңызды рөл атқарады.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер. Диссертациялық жұмыста бұрын зерттелінбеген қойылымдағы есептер қарастырылып, жаңа нәтижелер алынды және қорғауға ұсынылды:

- Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Глобалды шешілімді болатын интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің әлсіз және әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Арнайы интегралдық қосымша шартпен берілген сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Сызықты емес жылу көзімен берілген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды және глобалды әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Абсорбция мүшемен берілген сызықты p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды және глобалды әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Біртекті емес сұйықтықтар үшін бастапқы тығыздығы кейбір ішкі облыстарда вакуумге айналатын Кельвин-Фойгт жүйесі үшін бастапқы-шеттік есебінің әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығы, регулярлығы дәлелденді.

Аппробация. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері "Problems of modern mathematics and its Applications"конференциясында (Бішкек, Қырғызстан, 16-19 маусым, 2021), "Traditional international April scientific conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan"конференциясында (Алматы, Қазақстан, 5-7 сәуір, 2022 және 2023 жыл), "Functional Analysis in Interdisciplinary Applications"конференциясында (Анталия, Түркия, 2-7 қазан, 2023 жыл), әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті механика-математика факультеті математика кафедрасының ғылыми семинарында баяндама жасалынды және талқылаудан өтті.

Ғылыми ережелердің, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі белгілі ғалымдардың бұрын алынған нәтижелері негізінде жүргізілген зерттеу жұмысында келтірілген егжей-тегжейлі дәлелдемелер арқылы, индекстелетін халықаралық журналдардағы жарияланымдармен, сондай-ақ ғылыми қызметтің негізгі нәтижелерін жариялау үшін Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынған жарияланымдармен расталады, сонымен бірге конференция материалдарында расталады.

Жарияланымдар. Диссертациялық зерттеу жұмысының нәтижелері бойынша 12 жұмыс жарияланды, оның ішінде:
- Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша сәйкес бірінші, екінші және үшінші квартильдерге (Q1, Q2 және Q3) енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore процентилі 99, 68, 56 және 7 болатын ғылыми журналдардағы 4 мақала;
–Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Білім және ғылым саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда 3 мақала;
– халықаралық конференциялар жинағында 5 жарияланым.

Диссертациядағы барлық ұсынылып отырған жаңа нәтижелер ҚР БЖБ министрлігінің 2020-2022 жж. (AP08052425) және 2021-2023 жж. (AP09057950) арналған «Жас ғалымдар» гранттық жобасы аясында қаржыландырылып орындалды және докторант А. Шәкір жоба орындаушысы ретінде қатысып келеді.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс нормативтік сілтемелерден, кіріспеден, көмекші нәтижелерден, негізгі төрт бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерден), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертацияның көлемі 142 бет.

Диссертацияның мазмұны. Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыстағы кіріспеде зерттеу тақырыбының өзектілігі мен ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық құндылығы, зерттеу әдістері келтірілген, сондай-ақ, диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берілген.

Көмекші нәтижелер бөлімінде диссертациялық жұмыста алынған нәтижелерді тұжырымдау үшін математикалық және функционалдық анализ курсынан, сұйық механикасы теориясынан белгілі функционалдық кеңістіктер мен белгілеулер енгізіледі, сонымен қатар қажетті анықтамалар, леммалар, теоремалар, алгебралық және функционалдық теңсіздіктер келтіріледі.

Бірінші бөлімде сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін кері есеп қарастырылады, оның әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша локалды бар болуы және жалғыздығы дәлелденеді, дәлелдеу барысында кері есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығының қажетті немесе жеткілікті шарттары алынады. Сондай-ақ, арнайы жағдайларда әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша глобалды бар болуы және жалғыздығы зерттелінеді.

Екінші бөлімде арнайы қосымша шартпен берілген сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін кері есеп қарастырылады, оның әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша локалды бар болуы және жалғыздығы дәлелденеді, дәлелдеу барысында кері есептің бар болуы мен жалғыздығының қажетті немесе жеткілікті шарттары алынады. Сондай-ақ, сызықты теңдеу мен оң жағы арнайы түрде болғанда әлді және әлсіз шешімінің уақыт бойынша глобалды бар болуы және жалғыздығы зерттелінеді.

Үшінші бөлімде p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есеп қарастырылады және әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді, сонымен бірге дәлелдеу барысында кері есептің берілгендері қандай шарттарды қанағаттандырады және қандай функционалдық кеңістікте жатады деген секілді сұрақтарға жауап беріледі.

Төртінші бөлімде біртекті емес сұйықтың қозғалысын сипаттайтын Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады және әлді шешімінің бар болуы және жалғыздығы, регулярлығы дәлелденеді.

Қорытынды бөлімде алынған нәтижелерге жалпылама шолу жасалынады.

Автор отандық ғылыми кеңесшісі – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Х. Хомпышқа және шетелдік ғылыми кеңесшісі - PhD, профессор Х.В. де Оливейраға диссертациялық жұмысты орындауда құнды кеңестері мен жан-жақты көмегі үшін шынайы алғысын білдіреді.

КӨМЕКШІ НӘТИЖЕЛЕР

Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелерді тұжырымдау үшін келесі функционалдық кеңістіктер қолданылады.

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс болсын. Ең алдымен $L^p(\Omega)$ Лебег кеңістігі деп p дәрежесімен интегралданатын өлшемді функциялар кеңістігін атайды, яғни $u(x) \in L^p(\Omega)$ функциясы

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < +\infty$$

шартын қанағаттандырады, мұндағы $p \geqslant 1$. Сонымен қатар, $L^p(\Omega)$ Лебег кеңістігі төменде енгізілген

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ немесе } \|u\|_{p,\Omega} := \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

норма бойынша Банах кеңістігін құрайды.

Сондай-ақ, $H(\Omega)$ Гильберт кеңістігі деп скаляр көбейтінді анықтауға болатын ақырсыз өлшемді Евклид кеңістігін атайды. Гильберт кеңістігінің қарапайым мысалы ретінде $p = 2$ жағдайда $L^2(\Omega)$ Лебег кеңістігін айтуға болады. Бұл $L^2(\Omega)$ кеңістігінде норма және скаляр көбейтінді, сәйкесінше,

$$\forall f \in L^2(\Omega), \ \|f\|_{2,\Omega} := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \ (u, v)_{2,\Omega} := \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

өрнектерімен анықталады.

Ал $W^{k,p}(\Omega)$ Соболев кеңістігі деп $k-$ретті жалпылама туындысымен бірге $L^p(\Omega)$ кеңістігіне тиісті өлшемді функциялар кеңістігін атайды және ол төменде енгізілген норма бойынша

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} ess \sup\limits_{\Omega} |D^\alpha u| \,, \ p = \infty \end{cases}$$

Банах кеңістігін құрайды, мұндағы $k \geqslant 1$ кез келген бүтін сан, $\alpha-$ мультииндекс, $D^\alpha-$ мультииндекс бойынша жалпылама туынды. Егер $p = 2$ болса, онда $W^{k,2}(\Omega)$ кеңістігі Гильберт кеңістігін құрайды және оны $H^k(\Omega)$ арқылы да белгілейді. Бұл кеңістікте скалярлық көбейтінді келесі өрнекпен анықталады:

$$\forall u, v \in H^k(\Omega),\ (u,v) := \sum_{|\alpha|\leqslant k} (D^\alpha u, D^\alpha v)\,.$$

Енді $C_0^\infty(\Omega)$ арқылы шексіз ретті үзіліссіз дифференциалданатын әрі финитті функциялар кеңістігін белгілейік. Егер $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігін $W^{k,p}(\Omega)$ кеңістігінің нормасымен толықтыру жасасақ, онда $W_0^{k,p}(\Omega)$ Банах кеңістігі алынады. Бұл кеңістікке түйіндес Банах кеңістігін

$$W^{-k,p'}(\Omega) := \left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)^*, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, p > 1$$

арқылы белгілейді.

$L^p(0,T;B)$ арқылы Бохнер бойынша интегралданатын, яғни $u(x) \in L^p(0,T;B)$ функциясы үшін

$$\int_0^T \|u\|_B^p \, dt < \infty$$

шарттын қанағаттандыратын өлшемді функциялар кеңістігін белгілейді, мұндағы $1 \leqslant p$ және B Банах кеңістігі. Сонымен қатар, $L^p(0,T;B)$ кеңістігі төменде енгізілген норма бойынша Банах кеңістігін құрайды

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} := \left(\int_0^T \|u\|_B^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Енді диссертациялық жұмыста қолданылатын функционалдық тізбектердің әлсіз, жұлдызша әлсіз және әлді жинақтылықтардың анықтамаларына тоқталайық.

Анықтама 1. *(Әлді жинақтылық) Егер* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ *тізбегі мен* $u \in L^p(\Omega)$ *элементі келесі*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{p,\Omega} = 0$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда u_n *тізбегі* u *элементіне әлді жинақты деп атайды.*

Анықтама 2. *(Әлсіз жинақтылық) Егер* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$ *тізбегі мен* $u \in L^p(\Omega)$ *элементі келесі*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f, u_n\rangle_{L^p(\Omega)} = \langle f, u\rangle_{L^p(\Omega)}, \quad \textit{кез келген} \quad f \in (L^p(\Omega))^*$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда u_n *тізбегі* u *элементіне әлсіз жинақты деп атайды, мұндағы* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^p(\Omega)}-$ $L^p(\Omega)$ *және* $(L^p(\Omega))^*$ *Банах кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы.*

Ескерту 1. *Сонымен бірге, u_n тізбегінің u элементіне $L^p(\Omega)$ кеңістігінде әлсіз жинақтылығын келесі түрде ықшамдап қайта жазуға болады*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{әлсіз жинақты} \quad L^p(\Omega) - \text{де}, n \to +\infty.$$

Анықтама 3. *($*-$әлсіз жинақтылық) Егер $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^\infty(\Omega)$ тізбегі мен $f \in L^\infty(\Omega)$ элементі келесі*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, u\rangle_{L^\infty(\Omega)} = \langle f, u\rangle_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{кез келген} \quad u \in L^1(\Omega)$$

шектік теңдікті қанағаттандырса, онда f_n тізбегі f элементіне $*-$әлсіз (жұлдызша әлсіз) жинақты деп атайды, мұндағы $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^\infty(\Omega)}-$ $L^\infty(\Omega)$ және $L^1(\Omega)$ Банах кеңістіктері арасындағы екіжақтылық жақшасы.

Ескерту 2. *Сонымен қатар, f_n тізбегінің f элементіне $L^\infty(\Omega)$ кеңістігінде $*-$әлсіз жинақтылығын келесі түрде ықшамдап қайта жазуға болады*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{әлсіз жинақты} \quad L^\infty(\Omega) - \text{де}, n \to +\infty.$$

Теорема 1. *Айталық, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі $L^p(\Omega)$ рефлексивті Банах кеңістігінің нормасымен бірқалыпты шенелген болсын. Онда u_n тізбегінен $L^p(\Omega)$ кеңістігінде u элементіне әлсіз жинақталатын u_{n_k} іштізбегін бөліп алуға болады, яғни*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{әлсіз жинақты} \quad L^p(\Omega) - \text{де}, n \to +\infty.$$

Теорема 2. *Айталық, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбегі $L^\infty(\Omega)$ сеперабель Банах кеңістігінің нормасымен бірқалыпты шенелген болсын. Онда f_n тізбегінен $L^\infty(\Omega)$ кеңістігінде f элементіне $*-$әлсіз жинақталатын f_{n_k} іштізбегін бөліп алуға болады, яғни*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\text{әлсіз жинақты} \quad L^\infty(\Omega) - \text{де}, n \to +\infty.$$

Сондай-ақ, диссертациялық жұмыстағы қорытынды нәтижелерді дәлелдеуде төмендегі алгебралық және функционалдық теңсіздіктер қолданылады.

Юнг теңсіздігі. Кез келген $a > 0, b > 0$ және $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ көрсеткіштері үшін

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + \frac{(\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}}{q} b^q$$

теңсіздігі орынды, мұндағы ε кез келген оң еркін тұрақты .

Гельдер теңсіздігі. Келесі $1 \leqslant p_1, ..., p_m \leqslant \infty, \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ дәрежелері және $u_k(x) \in L^{p_k}(\Omega), k = 1, ..., m$ функциялары үшін төмендегі теңсіздік орынды

$$\int_\Omega \left| \prod_{k=1}^m u_k(x) \right| dx \leqslant \prod_{k=1}^m \|u_k(x)\|_{p_k,\Omega}.$$

Минковсий теңсіздігі. Кез келген $f(x), g(x) \in L^p(\Omega)$ функциялары үшін

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)+g(x)|^p\,dx \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

теңсіздігі орынды, мұндағы $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Интерполяциялық теңсіздік. Айталық, $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant \infty$ және

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}, \theta \in (0,1)$$

болсын. Сонымен қатар, $u(x) \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ болсын. Онда $u(x) \in L^r(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздік орынды

$$\|u\|_{r,\Omega} \leqslant \|u\|_{s,\Omega}^{\theta} \|u\|_{t,\Omega}^{1-\theta}.$$

Интегралдық Гронуолл теңсіздігі Айталық, $y(x)$ және $f(x)$ функциялары теріс емес, $[a,b]$ аралығында үзіліссіз функциялар болсын. Сондай-ақ,

$$y(x) \leqslant C_1 \int\limits_0^x y(\tau)f(\tau)d\tau + C,\; a \leqslant x \leqslant b$$

теңсіздігін қанағаттандырсын, мұндағы C оң тұрақты. Онда $y(x)$ функциясы үшін төмендегі бағалау орынды

$$y(x) \leqslant Ce^{\int\limits_a^x f(\tau)d\tau}.$$

Лемма 1 (Сызықты емес Гронуолл теңсіздігі.). *[59] Айталық, $y(x) : \mathbb{R}^+ \to [0,+\infty)$ үзіліссіз функциясы келесі*

$$y(x) \leqslant C_1 \int\limits_0^x y^{\mu}(s)ds + C_2, x \in \mathbb{R}^+, \mu > 1$$

теңсіздігін қанағаттандырсын, мұндағы C_1 және C_2 оң тұрақтылар. Онда $y(x)$ функциясы үшін

$$y(x) \leqslant C_2 \left(1-(\mu-1)C_1C_2^{\mu-1}x\right)^{-\frac{1}{\mu-1}}, 0 \leqslant x < x_{max} := \frac{1}{C_1C_2^{\mu-1}}.$$

Лемма 2. *[60] Барлық $p \in (1,\infty)$ және $\delta \geqslant 0$ мәндерінде p және d тәуелді C_1 және C_2 тұрақтылары табылып, сонымен қатар барлық $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d, d \geqslant 1$ үшін*

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \leqslant C_1|\xi-\eta|^{1-\delta}(|\xi|+|\eta|)^{p-2-\delta} \tag{24}$$

және

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)\cdot(\xi-\eta) \geqslant C_2|\xi-\eta|^{2+\delta}(|\xi|+|\eta|)^{p-2+\delta}. \tag{25}$$

теңсіздіктері орынды.

Ладыженская теңсіздіктері. Кез келген $u(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leqslant 2\,\|u\|_{2,\Omega}^2\,\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\,, \quad \text{егер} \quad d=2, \tag{26}$$

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\|u\|_{2,\Omega}\,\|\nabla u\|_{2,\Omega}^3\,, \quad \text{егер} \quad d=3, \tag{27}$$

$$\|u\|_{6,\Omega} \leqslant (48)^{\frac{1}{6}}\,\|\nabla u\|_{2,\Omega}\,, \quad \text{егер} \quad d=3. \tag{28}$$

Сұйық механикасынан белгілі келесі функционалдық кеңістіктердің анықтамасын берейік:

$$\mathcal{V} := \{u \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\}, \tag{29}$$

$$\mathbf{H} := L^2(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathcal{V} \text{ тұйықталуы}, \tag{30}$$

$$\mathbf{V}_p := \; W^{1,p}(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathcal{V} \text{ тұйықталуы}. \tag{31}$$

Ескерек жәйт, $p=2$ жағдайда $\mathbf{V}_p$ кеңістігін $\mathbf{V}$ арқылы белгілейді.

Лемма 3. *[61] Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ липщиц үзіліссіз шекарасы болсын. Егер $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ болса, онда келесі теңсіздіктер орынды*

$$\|u\|_{r^*,\Omega} \leqslant C(r,d)\,\|\nabla u\|_{r,\Omega}\,, \quad r^* = \frac{dr}{d-r}, \quad 1 \leqslant r < d, \tag{32}$$

$$\|u\|_{q,\Omega} \leqslant C(r,q,d)\,\|\nabla u\|_{W^{1,r}(\Omega)}\,, \quad d \leqslant q < \infty, \quad r = d, \tag{33}$$

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C(r,d)\,\|\nabla u\|_{r,\Omega}\,, \quad 0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{d}{r}, \quad r > d. \tag{34}$$

Сонымен қатар, келесі үзіліссіз енгізулер орынды

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ егер } 1 \leqslant q \leqslant r^* \text{ және } 1 \leqslant r < d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ егер } d \leqslant q < \infty \text{ және } r = d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \text{ егер } \alpha = 1 - \frac{r}{d} \text{ және } r > d.$$

Сондай-ақ, төмендегі компактілі енгізулер орынды

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ егер } 1 \leqslant q < r^* \text{ және } 1 \leqslant r < d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ егер } 1 \leqslant q < \infty \text{ және } r = d,$$

$$W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \text{ егер } 0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{d}{r} \text{ және } r > d.$$

Алдағы уақытта $\frac{dr}{d-r}$ өрнегін қысқаша r^* арқылы белгіленеді, ал $r = d$ жағдайда $r^* = \infty-$ға тең, мұндағы $d > r$.

Лемма 4. *(Обэн-Лионс леммасы [62]) Айталық, X, E және Y Банах кеңістіктері болсын. Бұл Банах кеңістіктері $X \hookrightarrow\hookrightarrow E \hookrightarrow Y$, сәйкесінше, компактілі және үзіліссіз енгізулерді қанағаттандырса, онда келесі*

$$L^r(0,T;X) \cap \{v : v_t \in L^1(0,T;Y)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(0,T;E), \text{ егер } 1 \leqslant r \leqslant \infty, \tag{35}$$

$$L^\infty(0,T;X) \cap \{v : v_t \in L^q(0,T;Y)\} \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];E), \text{ егер } q \in (1,\infty]. \tag{36}$$

компактілі енгізулері орынды.

Сондай-ақ, 3-леммада келтірілген Соболев теңсіздіктерімен қоса келесі пайдалы теңсіздіктер қолданылады.

Лемма 5. *[61] Айталық, Ω облысы $\mathbb{R}^d$ шенелген облыс және $r \geqslant 1$ болсын. Егер $\partial\Omega$ шекарасы $C^{0,1}$ класының элементі болса, онда $\forall u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды*

$$\|\nabla u\|_{r^*,\Omega} \leqslant C(r,d) \left\|D^2 u\right\|_{r,\Omega}, \tag{37}$$

$$\frac{1}{C(r,d)} \|\Delta u\|_{r,\Omega} \leqslant \left\|D^2 u\right\|_{r,\Omega} \leqslant C(r,d) \|\Delta u\|_{r,\Omega}. \tag{38}$$

Егер $\partial\Omega$ шекарасы $C^{1,1}$ класының элементі болса, онда $\forall u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ функциясы үшін келесі теңсіздіктер орынды

$$\|\nabla u\|_{r^*,\Omega} \leqslant C(r,d) \|\Delta u\|_{r,\Omega}, \tag{39}$$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C(r,d) \|\Delta u\|_{r,\Omega}, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{d}{r^*}, \quad 2r > d. \tag{40}$$

Мұндағы $|D^m u|, m \in \mathbb{N}$ келесі өрнекпен анықталады

$$|D^m u| := \sum_{|\gamma|=m} \left| \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial_{x_1}^{\gamma_1} \cdots \partial_{x_d}^{\gamma_d}} \right|, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_d.$$

дербес жағдайда, $|Du|^2 = |\nabla u|^2$ және $|D^2 u|^2 = |\nabla u_{x_1}|^2 + \cdots + |\nabla u_{x_d}|^2$. Айта кету керек, соңғы лемманың тармақтарында қолданылған $C = C(r,d)$ белгілеулері әр түрлі оң константалар болып есептелінеді.

Диссертациялық жұмыста қарастырылатын кейбір есептерде қысымды қалпына келтіруге маңызды рөлге ие келесі де Рамм леммасын тоқталайық.

Лемма 6. *[63] Айталық, $1 < q < \infty$ және $\varphi^* \in W^{-1,q'}(\Omega)$ болсын. Егер*

$$\langle \varphi^*, \varphi \rangle = 0, \quad \forall\, \varphi \in V_q$$

болса, онда

$$\int\limits_\Omega p\, dx = 0 \qquad \text{және} \qquad \langle \varphi^*, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega p \operatorname{div} \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз түрде $p \in L^q(\Omega)$ табылады. Сонымен қоса, C оң тұрақтысы үшін келесі бағалау орынды

$$\|p\|_{q,\Omega} \leqslant C \|\varphi^*\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}.$$

Мұнымен қоса, регуляр нәтижелер үшін қажетті Стокс операторының анықтамасын келтірейік.

Келесі

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : H^2(\Omega) \cap V \ &\longrightarrow \ H \\ u \ &\longmapsto \ -\mu\mathbb{P}(\Delta u) \end{aligned} \tag{41}$$

шарттарын қанағаттандыратын $\mathbb{A}$ бейнелеуі Стокс операторы деп аталады, мұндағы $\mathbb{P} : L^2(\Omega) \to H$ Лере проекциясы. Бұл оператор

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega\text{-де}, \tag{42}$$

$$-\mu\Delta u = f - \nabla p, \qquad \mathbf{x} \in \Omega\text{-де}, \tag{43}$$

$$u = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega\text{-да} \tag{44}$$

стационарлық Стокс есебінің u шешімі мен f сыртқы күштер арасындағы сәйкестікті орнатады. Лере проекциясының симметриялығынан келесі өрнек тұжырымдалады

$$\mu \int\limits_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega} \mathbb{A}(u) \cdot \varphi \, dx \qquad \forall\, u \in W^{2,2}(\Omega) \cap V, \quad \forall\, \varphi \in V. \tag{45}$$

Эллиптикалық операторлар теориясынан белгілі келесі нәтижені келтірейік.

Лемма 7. *[63] Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ шекарасы болсын, соныммен қатар $\partial\Omega$ беті C^2 класына тиісті болсын. Егер $f \in L^r(\Omega), r \in (1, \infty)$ болса, онда (42)-(43) Стокс есебін $\Omega-$да барлық дерлік нүктеде қанағаттандыратын, соныммен қатар $u \in W^{2,r}(\Omega)$ және $p \in W^{1,r}(\Omega), \int_\Omega p(x)\, dx = 0$ қасиеттерге ие жалғыз (u, p) шешімі табылады және әрі келесі бағалауды*

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \|p\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leqslant C\, \|f\|_{r,\Omega}\,. \tag{46}$$

қанағаттандырады, мұндағы $C = C(\mu, r, \Omega)$ оң тұрақты сан. Сондай-ақ, u функциясы үшін (44) шарт орынды.

(46) өрнектен келесі бағалауды алуға болады

$$\left\|D^2 u\right\|_{r,\Omega} + \|\nabla p\|_{r,\Omega} \leqslant C\, \|f\|_{r,\Omega}\,. \tag{47}$$

(41) Стокс операторы мен f күш өрісі арасындағы сәйкестікті пайдаланып, (47) өрнекте $r = 2$ жағдайында, төмендегі бағалау алынады

$$\left\|D^2 u\right\|_{2,\Omega} + \|\nabla p\|_{2,\Omega} \leqslant C\, \|\mathbb{A}(u)\|_{2,\Omega}\,. \tag{48}$$

1 ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІ ҮШІН КЕРІ ЕСЕПТЕР

Бұл бөлімде интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған кері есептің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы зерттелінеді.

1.1. Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

1.1.1 Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geqslant 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0,T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0,T], T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x},t), p(\mathbf{x},t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},s)ds - \nabla p = f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t) \tag{1.1}$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\boldsymbol{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t) \in Q_T \tag{1.2}$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.3}$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t) \in \Gamma_T \tag{1.4}$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}\boldsymbol{\omega}d\mathbf{x} = e(t),\ t \in [0,T] \tag{1.5}$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (u_1, u_2, ..., u_d)-$ сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x},t)-$ сұйықтың қысымы, ал ν және $\varkappa$ оң сандары, сәйкесінше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттері, $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) := f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$, $e(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.

Ғылыми әдебиеттерде (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесін интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт [4] теңдеулер жүйесі кейде Осколков теңдеулер жүйесі [42] деп те атайды. Физикалық жағынан мұндай теңдеулер жүйесі сығылмайтын тұтқыр ньютондық емес сұйықтың ағынын сипаттайды. (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесінің толыққанды физикалық негіздемесін және математикалық моделін [1,3,4,34,64] жұмыстардан көруге болады.

Сондай-ақ, (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесінде сыртқы күштердің тығыздығы $\mathbf{F}(x,t) = f(t)\mathbf{g}(x,t)$ шамасы белгілі болғанда тура есеп деп аталады және олар көптеген авторлардың жұмысында қарастырылған [3,42,46].

Тек $\mathbf{u}_0$ бастапқы жылдамдық пен $f(t)\mathbf{g}(x,t)$ сыртқы күштердің шамалары белгілі болғанда ғана ізденуге рұқсат етілетін тура есептерді теориялық тұрғыдан зерттеу маңызды болып табылады. Алайда, математикалық модельдің жалпы үдерісі белгілі болып, бірақ физикалық үдеріс жердің астында, жоғары температуралы ортада болып жатқанда, немесе физикалық үдерісте параметрді тікелей өлшеу мүмкін емес болғанда, немесе нақты бір параметрі белгісіз (мысалы, $\mathbf{f}(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігі) болғанда кері есептердің [5] маңызды екенін аңғаруға болады.

Кеңістіктік айнымалыдан тәуелді $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ функциясын қалпына келтіруге арналған оң жағы $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) := \mathbf{f}(\mathbf{x})g(\mathbf{x},t)$ түріндегі сызықты (конвективті мүшесі жоқ) (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесі үшін

$$\int_0^T \mathbf{u}w(t)dt = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \ \int_0^T \nabla p w(t)dt = \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

қосымша шарттарды қанағаттандыратын кері есеп $K(t) \neq 0$ жағдайда [65] жұмыста, ал $K(t) = 0$ жағдайда [51] жұмыста қарастырылды. Жылдамдық векторымен бірге $K(t)$ өзегін анықтауға арналған(1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесі үшін (1.5) қосымша шартпен қойылған кері есеп [52] жұмыста қарастырылған. Осы секілді әртүрлі Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін кері есептер [51,52,54,55,65,66] жұмыстарда зерттелінді. Егер (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесінде $\varkappa = 0$ және $K(t) = 0$ болса, онда классикалық Навье-Стокс жүйесі шығады. Навье-Стокс және оған қатысты гидродинамиканың теңдеулер жүйесі үшін кері есептер [5,26,27,31,32,67–69] жұмыстарда қарастырылды.

Анықтама 1.1. *(1.1)-(1.5) кері есебінің әлсіз шешімі деп*

1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, $f(t) \in L^2[0,T]$;

2 $\Omega-$*да барлық дерлік жерде* $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ *бастапқы шартты;*

3 Кез келген $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}$ *және барлық* $t \in (0,T)$ *үшін төмендегі интегралдық* *теңе-теңдікті*

$$\frac{d}{dt}\Big((\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}+\varkappa(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}\Big)+\nu(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}=
f(t)(\mathbf{g}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}-((\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}-
\int_0^t K(t-s)(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}\,ds. \tag{1.6}$$

қанағаттандыратын $(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),f(t))$ *функциялар жұбын атайды.*

Анықтама 1.2. *(1.1)-(1.5) кері есебінің әлді шешімі деп*

1 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))\cap\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_t\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$, $f(t)\in L^2[0,T]$;

2 *әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын*

$(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),f(t))$ *функциялар жұбын атайды.*

Ескерту 1.1. *Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [70] мақаладағыдай* $\mathbf{u}$ *және f функциялары белгілі болғаннан кейін 6-лемманы қолданып, (1.2) теңдеуден бірмәнді қалпына келтіруге болады.*

Кері есепті эквивалентті локалды емес тура есепке келтіру

Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\in\mathbf{V}; \tag{1.7}$$

$$\exists k_0\in\mathbb{R}:0<k_0<\infty,\quad |g_0(t)|=\Big|(\mathbf{g}(t),\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\Big|\geqslant k_0>0,\ \forall t\geqslant 0; \tag{1.8}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)); \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\in\mathbf{V},\ e(t)\in W_2^1([0,T]); \tag{1.10}$$

$$(\mathbf{u}_0,\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}=e(0); \tag{1.11}$$

$$K(t)\in L^2([0,T]):\quad \|K(t)\|_{L^2([0,T])}\equiv K_0<\infty. \tag{1.12}$$

Енді (1.1) теңдеуді $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (1.5) қосымша және (1.8) шартты қолдансақ, онда $f(t)$ функциясы келесі түрде анықталады

$$f(t)=\frac{1}{g_0(t)}\Big(e'(t)+\varkappa(\nabla\mathbf{u}_t(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}+\nu(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}-
((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t))_{2,\Omega}+\int_0^t K(t-s)(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\,ds\Big):=F_1(\mathbf{u},t). \tag{1.13}$$

Мұнан соң, (1.13) өрнекті (1.1) теңдеуге қойғансақ, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds - \nabla p = \\ F_1(\mathbf{u},t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t), \quad \boldsymbol{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \ (\mathbf{x},t)\in Q_T, \tag{1.14}$$

теңдеулер жүйесін, (1.3) бастапқы және (1.4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы $F_1(\mathbf{u},t) = f(t)$ функциясы (1.13) өрнекпен анықталады. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебін, сәйкесінше, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есепке алып келдік.

Кері есеп пен локалды емес тура есептің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Лемма 1.1. *Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Демек, (1.1)-(1.5) кері есебі (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни ($\boldsymbol{u}, p, f$) функциялары (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі болса, онда ($\boldsymbol{u}, p$) жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, ($\boldsymbol{u}, p$) функциялары (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда ол (1.13) өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімін береді.*

Ескерту 1.2. *(1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімінің анықтамасы 1.1 және 1.2-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.*

Дәлелдеуі 1. *Шын мәнінде, лемманың дәлелдеуінің бірінші бөлігі (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесінен (1.14) теңдеуді алуда дәлелденді.*

Енді екінші бөлігін дәлелдейік. Айталық, $(\mathbf{u}, p)$ *функциялар жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімі болсын. Екінші жағынан,* $(\mathbf{u}, p)$ *функциялар жұбы (1.13) өрнегімен анықталған* $f(t)$ *функциясымен бірге (1.1)-(1.4) өрнектерді қанағаттандырады. Олай болса,* $(\mathbf{u}, p, f)$ *функциялары (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімі екенін дәлелдеу үшін (1.5) қосымша шарттың орынды екенін көрсету жеткілікті.*

Кері жорып, яғни (1.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық, яғни

$$(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e_1(t),\ t\in[0,T] \tag{1.15}$$

болсын, мұндағы $t \geqslant 0$ *үшін* $e_1(t) \neq e(t)$. *Шешімнің анықтамасы мен (1.10), (1.15) шарттардан* $e_1(t) \in W_2^1([0,T])$ *орындалады, сонымен қатар (1.11) үйлесімділік шарттарынан төмендегі нәтиже қорытылады*

$$e_1(0) = (\mathbf{u}(0), \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0).$$

Енді (1.14) өрнекке $\boldsymbol{\omega}$ *функциясын көбейтіп және бөліктеп интегралдау* *өрнегін қолданып, сонымен бірге (1.15) шартты ескерсек, онда*

$$
\begin{aligned}
& e_1'(t) + \varkappa\left(\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \nu\left(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \\
& \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds = \frac{1}{g_0(t)}\Bigg(e'(t) + \varkappa\left(\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \\
& \nu\left(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds\Bigg)\left(\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}
\end{aligned} \tag{1.16}
$$

теңдігі шығады, сондай-ақ (1.8) шарттан $E(t) = e_1(t) - e(t)$ *функциясы үшін келесі Коши есебі алынады*

$$
\begin{cases} E'(t) = 0, \\ E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \end{cases} \tag{1.17}
$$

және одан $t \geqslant 0$ *үшін* $e_1(t) \equiv e(t)$ *тұжырымдалады.*

1.1.2 Кері есептің әлсіз шешімінің бар болуы

Алдағы уақытта 1.1-лемма бойынша (1.1)-(1.5) кері есебінің орнына (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің шешімділігі зерттелінеді.

Теорема 1.1. *Айталық, (1.7)-(1.12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын*

$$
\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant m < 2. \tag{1.18}
$$

Онда ақырлы $T_1 \in (0, T]$ *уақыты табылып, (1.14), (1.3)-(1.4) тура есебінің* Q_{T_1} *цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы* T_1 *мәні төменде (1.35) өрнекпен анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады*

$$
\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})}^2 \leqslant C, \tag{1.19}
$$

мұндағы C *есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.*

Ескерту 1.3. *1.1-теоремадағы (1.18) шарт (1.5) қосымша шартқа қатысты бағалаулар алу кезінде пайда болды.*

Дәлелдеуі 2. *Теореманы дәлелдеу үшін Фаэдо-Галеркин әдісі қолданылады: ең алдымен жуық шешімдер құрылып, оған бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденеді.*

Галеркиндік жуықтау. *Айталық,* $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *функциялары* $\mathbf{H}$ *кеңістігінің элементтерінен құралған,* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *кеңістігінде ортогональ және сызықтық комбинациялары* $\mathbf{V}$ *кеңістігінде барлық жерде тығыз жүйе болсын.*

Өлшемі $n-$ге $(n \in \mathbb{N})$ тең және $\boldsymbol{\varphi}_k$, $k = 1, \ldots, n$ жүйесінің сызықтық комбинациясынан тұратын $\mathbf{X}^n$ кеңістігін қарастырайық. Кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін (1.1)-(1.4), (1.13) есептің жуық шешімі келесі түрде ізделінеді

$$\mathbf{u}^n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^n(t)\boldsymbol{\varphi}_j(x), \quad \boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{X}^n, \tag{1.20}$$

мұндағы $c_j^n(t)$, $j = 1, ..., n$ коэффициенттері белгісіз және төмендегі жай дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ) жүйесінің шешімі болып табылады

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\Big((\mathbf{u}^n(t), \boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega} + \varkappa\,(\nabla\mathbf{u}^n(t), \nabla\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}\Big) + \nu\,(\nabla\mathbf{u}^n(t), \nabla\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega} - \\ ((\boldsymbol{u}^n(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{u}^n(t))_{2,\Omega} = -\int_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}\,ds + \\ F_1(\mathbf{u}^n, t)\,(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}\,,\end{gathered} \tag{1.21}$$

мұндағы $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ және

$$\begin{gathered}F_1(\mathbf{u}^n, t) = \frac{1}{g_0}\Big(e'(t) + \varkappa\,(\nabla\mathbf{u}_t^n(t), \nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu\,(\nabla\mathbf{u}^n(t), \nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} - \\ ((\boldsymbol{u}^n(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}^n(t))_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\,ds\Big).\end{gathered} \tag{1.22}$$

Енді (1.21) ЖДТ жүйесін келесі бастапқы шарттармен толықтырайық

$$\mathbf{u}^n(0) = \mathbf{u}_0^n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.23}$$

мұндағы

$$\mathbf{u}_0^n = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\varphi}_j\right)_{2,\Omega} \boldsymbol{\varphi}_j$$

функциясы $\mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}$ кеңістігіндегі функционалдық тізбек болып табылады және

$$\mathbf{u}_0^n(\mathbf{x}) \to \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ әлді жинақты } \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}\text{-де } n \to \infty. \tag{1.24}$$

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша (1.21)-(1.23) Коши есебінің $[0, t_0]$ аралығында $c_j^n(t)$ шешімі локалды бар болады. Төменде, априорлық бағалаулар арқылы Коши есебінің шешімін $[0, T_0] \subset [0, T]$ кеңейтуге болатынын көруге болады, мұндағы $[0, T_0]-$ априорлық бағалаулар орынды болатын максималды аралық.

Априорлық бағалаулар. *(1.21) жүйесінің $k-$теңдеуін $c_k^n(t)$ және $\frac{d\,c_k^n(t)}{dt}$ көбейтіп, k бойынша 1-ден $n-$ге шейін қосындыласақ, сәйкесінше, келесі* *теңдіктер алынады*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) + \nu\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ -\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t)\left(\mathbf{g}, \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} \tag{1.25}$$

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\,\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ \left(\left(\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + \\ F_1(\mathbf{u}^n, t)\left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}. \tag{1.26}$$

Жоғарыдағы (1.25) және (1.26) теңдіктерді біріктерсек, онда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu+\varkappa)\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) + \nu\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\,\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = -\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} ds - \\ \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + F_1(\mathbf{u}^n, t)\left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} + \\ F_1(\mathbf{u}^n, t)\left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} + \left(\left(\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} := \sum_{i=1}^{5} I_i. \tag{1.27}$$

өрнегі алынады. Соңғы (1.27) өрнектің оң жағына Гельдер және Юнг теңсіздіктерін қолданып келесідей бағалайық

$$|I_1| \leqslant \frac{\nu}{2}\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\, ds; \tag{1.28}$$

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{4}\,\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{\varepsilon_1}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\, ds; \tag{1.29}$$

$$|I_3| \leqslant |F_1|\,\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega} \leqslant \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}}{k_0}.$$

$$\Bigg[|e'(t)| + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} \Bigg(\nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 + K_0 \left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg)\Bigg] \leqslant \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2}\right) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\varkappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \Bigg[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \times \Bigg(\nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + K_0^2 \int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds\Bigg)\Bigg], \tag{1.30}$$

$$|I_4| \leqslant \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2}\right) \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\varkappa^2}{2\varepsilon_2 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2\varepsilon_3 k_0^2} \Bigg[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \Bigg(C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + \nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 \int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds\Bigg)\Bigg], \tag{1.31}$$

$$|I_5| \leqslant \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 \leqslant \frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{C^2(\Omega)}{\varepsilon_1} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4. \tag{1.32}$$

Осылайша, алынған (1.28)-(1.32) теңсіздіктерді (1.27) өрнектің оң жағына қойғанда келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\frac{d}{dt}\left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant C_1 \int\limits_0^t \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) ds + C_2 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right)^2 + C_3 \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) + C_4(t), \tag{1.33}$$

мұндағы

$$\alpha := 2\left(1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}\right); \;\; \beta := 2\left(\varkappa - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varkappa^3}{\varepsilon_2 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\right);$$

$$C_1 := \frac{1}{\nu + \varkappa}\left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_1} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\right);$$

$$C_2 := \frac{2C^2}{(\nu+\varkappa)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_3 k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\right);$$
$$C_3 := \frac{1}{\nu+\varkappa}\left(\varepsilon_3+\varepsilon_2+\frac{2\nu^2}{\varepsilon_3 k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\right);$$
$$C_4(t) := \frac{2}{\varepsilon_3 k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\left|e'(t)\right|^2.$$

Енді $\varepsilon_2 = \dfrac{2e^{\varepsilon}-1}{e^{\varepsilon}}; \varepsilon_3 = \dfrac{\sin\varepsilon}{e^{\varepsilon}}; \quad \varepsilon\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ *таңдасақ және* ε_1*−дің сәйкес мәні үшін* $\dfrac{\varkappa}{k_0^2}\sup\limits_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant m < 2$ *теңсіздігінің жоғарғы шекарасын* m*−нен* 2*−ге дейін кеңейтуге болады. Алайда,* ε_1 *саны* $m>2$ *болатындай таңдалмауы керек, себебі* $\alpha>0$ *болғандығынан* $\varepsilon_2<2$.

Енді (1.33) өрнекті s *бойынша* 0*−ден* t*−ға шейін интегралдап, (1.24) өрнекті қолдансақ, келесі интегралдық теңсіздікке келеміз*

$$z(t)+\nu\|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2+\alpha\|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2+\beta\|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leqslant C_5\int_0^t z^2(s)ds + C_6, \tag{1.34}$$

мұндағы

$$z(t) := 1+\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2+(\nu+\varkappa)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2;$$

$$C_5 = \max\{C_1T+C_3; C_2\}; \quad C_6 = \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2+(\varkappa+\nu)\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2+\int_0^t C_4(s)ds.$$

Әрі қарай $z(t)$ *функциясы үшін 1-леммадағы сызықтық емес Гронуолл теңсіздігін қолданғанда (1.34) өрнектен*

$$0\leqslant t\leqslant T_1 < T_\star := \frac{1}{C_5C_6}. \tag{1.35}$$

уақыт аралығы үшін келесі бағалау орынды

$$z(t)\leqslant \frac{C_6}{1-C_5C_6t}\equiv K_1<\infty. \tag{1.36}$$

Демек, кез келген $t\leqslant T_1<T_\star$ *үшін (1.36) өрнектен келесі бағалау орынды екенін көруге болады*

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2+(\nu+\varkappa)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\leqslant K_1. \tag{1.37}$$

(1.37) бағалауды (1.34) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алғанда келесі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t\in[0,T_1]}\Big(\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}\Big) + \|\mathbf{u}^n\|^2_{L^2(0,T_1;\mathbf{V})} + \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(Q_{T_1})} + \\ \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(0,T_1;\mathbf{V})} \leqslant C := C(\nu, \varkappa, \alpha, \beta, T_1, K_1, C_5, C_6). \tag{1.38}$$

Шектік көшу. *Жоғарыдағы (1.20) өрнекпен анықталған $\mathbf{u}^n$ жуық шешімі (1.19) априорлық бағалауды қанағаттандырады. Бұдан $\mathbf{u}^n$ тізбегінің $\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегі табылып, ол келесі $*-$әлсіз және әлсіз жинақтылықтардың орынды екенін көруге болады. Ескерер жәйт, шектік көшуді дәлелдеуде ыңғайлылық үшін $\mathbf{u}^{n_k}$ іштізбегін $\mathbf{u}^n$ арқылы белгілеуі қолданылады.*

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T_1;\mathbf{V})\text{-де} \quad n\to\infty, \tag{1.39}$$

$$\mathbf{u}^n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad *-\text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T_1;\mathbf{V})\text{-де}, \quad n\to\infty, \tag{1.40}$$

$$\mathbf{u}^n_t \rightharpoonup \mathbf{u}_t \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T_1;\mathbf{V})\text{-де}, \quad n\to\infty. \tag{1.41}$$

Сонымен қатар, (1.19) априорлық бағалаудан келесі тұжырымдар орынды

$$\mathbf{u}^n \quad \text{тізбегі} \quad L^2(0,T_1;\mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega))\text{-де бірқалыпты шенелген}, \tag{1.42}$$

$$\mathbf{u}^n_t \quad \text{тізбегі} \quad \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\text{-де бірқалыпты шенелген}. \tag{1.43}$$

Сонымен бірге, $\mathbf{W}^{1,2}_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ компактілі енгізуі және Обэн-Лионс леммасын бойынша келесі әлді жинақтылық шығады

$$\mathbf{u}^n \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{әлді жинақты } L^2(0,T_1;\mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}, \quad n\to\infty. \tag{1.44}$$

Айталық, $\zeta(t) \in C^\infty_0([0,T_1])$ болсын. (1.21) өрнекті $\zeta(t)$ функцияға көбейтіп, 0 мен T_1 аралығында интегралдасақ, онда төмендегі өрнек орынды

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \mathbf{u}^n_t\cdot\boldsymbol{\varphi}_k\zeta\,d\mathbf{x}dt + \varkappa\int\limits_0^{T_1}(\nabla\mathbf{u}^n_t, \nabla\boldsymbol{\varphi}_k\zeta)_{2,\Omega}\,dt + \int\limits_{Q_{T_1}}(\mathbf{u}^n\cdot\nabla)\mathbf{u}^n\cdot\boldsymbol{\varphi}_k\zeta\,d\mathbf{x}dt + \\ \nu\int\limits_0^{T_1}(\nabla\mathbf{u}^n, \nabla\boldsymbol{\varphi}_k\zeta)_{2,\Omega}\,dt = \int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{t} K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\boldsymbol{\varphi}_k\zeta)_{2,\Omega}\,dsdt + \\ \int\limits_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t)\int\limits_\Omega \mathbf{g}\boldsymbol{\varphi}_k\zeta\,d\mathbf{x}\,dt,\ \ k\in\{1,\dots,n\}. \tag{1.45}$$

Сондай-ақ, $k-$ны бекітіп және (1.39)-(1.44) нәтижелерді қолданып, (1.45) *өрнектен $n \to \infty$ шекке көшсек, онда төмендегі өрнек тұжырымдалады*

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x}dt + \varkappa \int\limits_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}_t, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt + \int\limits_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x}dt +$$
$$\nu \int\limits_0^{T_1} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dt = \int\limits_0^{T_1} \int\limits_0^t K(t-s) \, (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}_k \zeta)_{2,\Omega} \, dsdt + \tag{1.46}$$
$$\int\limits_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}, t) \int\limits_\Omega \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x} \, dt, \;\; k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Соңғы теңдіктегі конвективті мүше үшін келесі шектік көшуді орынды

$$(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n \rightharpoonup (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad \textit{әлсіз жинақты} \;\; \mathbf{L}^2(Q_{T_1})\textit{-де}, \qquad n \to \infty. \tag{1.47}$$

Шын мәнінде, (1.47) өрнекті интеграл арқылы жазсақ, онда төмендегі түрде болады

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right] \, d\mathbf{x}dt =$$
$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left[(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla \right] \mathbf{u}^n \, d\mathbf{x}dt - \int\limits_{Q_{T_1}} (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}dt,$$

бұл өрнекке Гелдер теңсіздігін (1.19) мен (1.44) өрнектерімен бірге қолданганда оң жағындағы бірінші интегралдың мәні нөлге жинақтылатынын аңғаруға болады:

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left[(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}) \cdot \nabla \right] \mathbf{u}^n \, d\mathbf{x}dt \leqslant \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V})} \leqslant$$
$$\sqrt{C} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})} \longrightarrow 0, \quad \textit{егер } n \to \infty.$$

Ал, (1.39) өрнек пен $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(Q_{T_1})$ әсерінен екінші интеграл нөлге барады. Аналогты түрде локалды емес мүше үшін де келесі шектік көшу орынды

$$\int\limits_0^{T_1} F_1(\mathbf{u}^n, t) \int\limits_\Omega \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x}dt = \int\limits_0^{T_1} \frac{1}{g_0(t)} \Big[e'(t) + \varkappa \, (\nabla \mathbf{u}_t^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \nu \, (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} -$$
$$((\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}^n)_{2,\Omega} + \int\limits_0^t K(t-s) \, (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} \, ds \Bigg] \int\limits_\Omega \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x}dt \rightharpoonup$$
$$\int\limits_0^{T_1} F(\mathbf{u}, t) \int\limits_\Omega \mathbf{g} \boldsymbol{\varphi}_k \zeta \, d\mathbf{x}dt \;\; \textit{жинақты} \; L^2([0, T_1])\textit{-де}, \;\; n \to \infty.$$

Соңғы өрнекте екінші мүше (1.41) өрнектің, үшінші мүше (1.39) өрнектің, бесінші мүше (1.40) өрнектің әсерінен жинақты. Сондай-ақ, бірінші мүше тривиалды түрде, ал төртінші мүше (1.47) өрнектің әсерінен жинақты. (1.46) теңдеу сызықты болғандықтан кез келген $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$ функцияларының ақырлы сызықтық комбинациясы мен $\zeta \in C_0^\infty([0, T_1])$ шартын қанағаттандыратын $\boldsymbol{\varphi}\zeta \in \mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})$ функциясы үшін де орынды болып қалады. Мұнымен қоса, (1.46) өрнектегі $[0, T_1]$ аралығындағы интеграл астындағы барлық қосылғыштар t айнымалысы бойынша үзіліссіз функция болып табылады. Демек, барлық дерлік $t \in [0, T_1]$ және $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}$ үшін келесі интегралдық теңдік алынды

$$\int\limits_{\Omega} \left[\mathbf{u}_t(t) + \big(\mathbf{u}(t) \cdot \nabla\big)\mathbf{u}(t)\right] \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} + \nu \left(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\varphi}\right)_{2,\Omega} +$$

$$\varkappa \left(\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\varphi}\right)_{2,\Omega} = \int\limits_0^t K(t-s) \left(\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\varphi}\right)_{2,\Omega} ds + \tag{1.48}$$

$$F_1(\mathbf{u}, t) \int\limits_{\Omega} \mathbf{g}(t) \boldsymbol{\varphi}\, d\mathbf{x}.$$

1.1-Теореманың дәлелдеуі аяқталды.

1.1.3 Кері есептің әлді шешімінің бар болуы

Бұл бөлімшеде қарастырылып отырған кері есептің әлді шешімінің бар болуы зерттелінеді.

Теорема 1.2. *Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшін келесі шарт орынды болсын*

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega). \tag{1.49}$$

Олай болса, (1.14), (1.3)-(1.4) тура есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол (1.19) бағалауға қоса

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|\mathbf{u}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))} \leqslant C < \infty. \tag{1.50}$$

бағалау орынды болады, мұндағы T_1 мәні (1.35) өрнектен белгілі және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Дәлелдеуі 3. *Жалпылама әлді шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есеп үшін*

$$\widetilde{\Delta} \boldsymbol{\varphi}_k := -\mathbb{P}\Delta \boldsymbol{\varphi}_k = \lambda_k\, \boldsymbol{\varphi}_k, \quad \boldsymbol{\varphi}_k(x) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \tag{1.51}$$

түрінде Стокс операторы үшін қойылған спектралды есептің меншікті функциялары қолданылады, мұндағы $\mathbb{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{H}(\Omega)$ Лере проекциясы. Сондай-ақ, $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k=1}^\infty$ жүйесі $\mathbf{H}$ кеңістігінде ортогональ және $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған жүйені құрайды [71], [72].

Олай болса, әлсіз шешім үшін алынған барлық априорлық бағалаулар әлді шешімге де орынды. 1.2-теореманы толық дәлелдеу үшін $\Delta\mathbf{u}^n$ мен $\Delta\mathbf{u}_t^n$−ға априорлық бағалаулар алсақ жеткілікті.

Сөйтіп, (1.21) өрнекті $\lambda_k \frac{d\,c_k^n(t)}{d\,t}$−ға көбейтіп, k бойынша 1−ден n−ге шейін қосындыласақ, онда келесі өрнек шығады

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2=$$
$$-\left(\left(\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n(t),\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)-\int\limits_0^t K(t-s)\left(\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s),\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}ds+ \tag{1.52}$$
$$F_1(\mathbf{u}^n,t)\left(\mathbf{g},-\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}\equiv I_6,$$

мұндағы $F(\mathbf{u}^n,t)$ функциясы (1.22) өрнегімен анықталады және төмендегі бағалауды қанағаттандырады

$$|F_1|^2\leqslant\frac{5}{k_0^2}\left[|e'(t)|^2+\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\left(\varkappa^2\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\nu^2\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.C^4(\Omega)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4+K_0^2\int\limits_0^t\|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds\right)\right]. \tag{1.53}$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (1.53) бағалауды бірге қолданып, I_6−ті бағалайық

$$|I_6|\leqslant\frac{\varkappa}{2}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{3}{2\varkappa}\left[C\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\right.$$
$$\left.K_0^2\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+|F_1|^2\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\right]. \tag{1.54}$$

(1.54) бағалауды (1.52) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\nu\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\leqslant\frac{3}{\varkappa}\left[C\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right.$$
$$\left.\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+K_0^2\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+|F_1|^2\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\right]. \tag{1.55}$$

Енді (1.55) өрнекті s бойынша 0−ден t−ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds\leqslant C_8+C_9\int\limits_0^t\nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds, \tag{1.56}$$

мұндағы

$$C_8 := \nu \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \int\limits_0^{T_1} |F_1(s)|^2 \, ds < \infty,$$

$$C_9 := \frac{3}{\nu\varkappa} \left(C(\Omega) \sup_{t\in[0,T_1]} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 T \right) < \infty.$$

Мұнан кейін, (1.56) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

$$\left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \frac{1}{\nu} C_8 e^{C_9 T_1}, \quad \forall t \in (0, T_1) \tag{1.57}$$

бағалауы қорытылады. Егер (1.56) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алып және (1.57) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t\in[0,T_1]} \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_1})}^2 \leqslant C := C(\nu, \varkappa, C_8, C_9, T_1) < \infty. \tag{1.58}$$

1.1.4 Шешімнің жалғыздығы

Теорема 1.3. *Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ функциялары (1.1)-(1.4), (1.13) есебінің бірдей берілгендері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз (әлді) шешімі болсын. Онда барлық $(x, t) \in Q_{T^*}$ үшін (1.1)-(1.4), (1.13) есебінің әлсіз (әлді) шешім жалғыз болады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұндағы T^*- әлсіз (әлді) шешімнің бар болуының максималды уақыты.*

Дәлелдеуі 4. *$\mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_1$ үшін (1.14) теңдеуді жазып және оларды бір-бірін азайтып, шыққан нәтижені сәйкесінше $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ және $\mathbf{u}_t$ функцияларына $\mathbf{L}_2(\Omega)$ кеңістігінде скаляр көбейткенде, сәйкес келесі өрнектер алынады*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\
&- ((\boldsymbol{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}(t))_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s) \left(\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t) \right)_{2,\Omega} ds + \\
&\frac{1}{g_0(t)} \Big[\varkappa \left(\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \boldsymbol{\omega} \right)_{2,\Omega} + \nu \left(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \boldsymbol{\omega} \right)_{2,\Omega} + \left((\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_1(t) \right)_{2,\Omega} + \\
&((\mathbf{u}_2(t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}(t)) + \int\limits_0^t K(t-s) \left(\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \boldsymbol{\omega} \right)_{2,\Omega} ds \Big] \left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}(t) \right)_{2,\Omega},
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+\varkappa\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}=\\
&-\left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega}-\left(\left(\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega}-\\
&\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s),\nabla\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}ds+\frac{1}{g_0(t)}\Big[\varkappa\left(\nabla\mathbf{u}_t(t),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}+\\
&\nu\left(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}+\left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}_1(t)\right)+\\
&\left(\left(\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t)\right)+\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}ds\Big]\left(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega}
\end{aligned}
\tag{1.60}
$$

Соңғы алынған теңдіктерді қоссақ, онда төмендегі нәтиже шығады

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+(\nu+\varkappa)\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\right)+\nu\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\\
&\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+\varkappa\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}=-\left(\left(\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}_1(t),\boldsymbol{u}(t)\right)_{2,\Omega}+\\
&\left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega}+\left(\left(\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_t\right)_{2,\Omega}-\\
&\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega}ds+\frac{1}{g_0(t)}\Big[\varkappa\left(\nabla\mathbf{u}_t(t),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}+\\
&\nu\left(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}+\left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\omega,\mathbf{u}_1(t)\right)_{2,\Omega}+\left(\left(\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t)\right)+\\
&\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\omega\right)_{2,\Omega}ds\Big]\left(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega}+\\
&\int\limits_0^t K(t-s)\nabla\mathbf{u}^n(s)\nabla\mathbf{u}_t^n(t)ds-\frac{1}{g_0(t)}\Big[\varkappa\left(\nabla\mathbf{u}_t,\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}+\\
&\nu\left(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}+\left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}_1(t)\right)+\left(\left(\mathbf{u}_2(t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t)\right)+\\
&\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega}ds\Big]\left(\mathbf{g},\mathbf{u}_t(t)\right)_{2,\Omega}=\sum_{i=1}^{7}R_i.
\end{aligned}
\tag{1.61}
$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерінің көмегімен (1.59) өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$
\begin{aligned}
|R_1|=&\left|-\left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_1(t),\,\mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega}\right|\leqslant\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{\mathbf{V}}\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{4,\Omega}^{2}\leqslant\\
&C(\Omega)\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{\mathbf{V}}\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2},
\end{aligned}
\tag{1.62}
$$

$$
\begin{aligned}
|R_2|\leqslant&\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{4,\Omega}\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{\mathbf{V}}\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{4,\Omega}\leqslant\\
&\frac{\varepsilon_0}{8}\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\frac{2C^2}{\varepsilon_0}\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2},
\end{aligned}
\tag{1.63}
$$

$$
\begin{gathered}
|R_3| \leqslant \|\mathbf{u}_2(t)\|_{4,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{4,\Omega} \leqslant \\
\frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2C^2}{\varepsilon_0} \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 ,
\end{gathered} \tag{1.64}
$$

$$
\begin{gathered}
|R_4| \leqslant \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds,
\end{gathered} \tag{1.65}
$$

$$
\begin{gathered}
|R_5| \leqslant \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}}{k_0} \|\omega\|_{\mathbf{V}} [\varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + \\
\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + \\
K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg] \leqslant \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2}{2k_0^2} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \\
\frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{2} \Big[\nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \Bigg] + \\
\frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2\varkappa^2}{\varepsilon_0 k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2
\end{gathered} \tag{1.66}
$$

$$
\begin{gathered}
|R_6| \leqslant \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
\frac{\varepsilon_0}{8} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_0} \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds,
\end{gathered} \tag{1.67}
$$

$$
\begin{gathered}
|R_7| \leqslant \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}}{k_0} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} [\varkappa \|\mathbf{u}_t(t)\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + \\
\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_2(t)\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}} + K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg] \leqslant \\
\frac{\varepsilon_1}{4} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{\varepsilon_1 k_0^2} .
\end{gathered}
$$

$$\begin{aligned}&\Big[\nu\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\left\|\mathbf{u}_2(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\\&K_0^2\int\limits_0^t\left\|\mathbf{u}(s)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}ds\Big]+\frac{\varepsilon_1}{4}\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+\frac{\varkappa^2\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}}{\varepsilon_1 k_0^2}\left\|\mathbf{g}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\end{aligned}\tag{1.68}$$

Алынған (1.62)-(1.68) бағалауларды (1.61) өрнекке қойғанда, келесі дифференциалдық теңсіздік алынады

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+(\varkappa+\nu)\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\right)+\nu\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\alpha\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+\\&\beta\left\|\mathbf{u}_t(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\leqslant a_1\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}+a_2\int\limits_0^t\left\|\mathbf{u}(s)\right\|_{\mathbf{V}}^{2}ds+a_3\left\|\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2},\end{aligned}\tag{1.69}$$

мұндағы

$$\alpha:=2\left(\varkappa-\frac{\varepsilon_0}{2}-\frac{\varkappa^2}{\varepsilon_1 k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{g}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\right),\ \beta:=2\left(1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right);$$

$$a_1:=2C\sup_{t\in[0,T^*]}\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{2,\Omega}+\frac{4C^2}{\varepsilon_0}\sup_{t\in[0,T^*]}\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+\frac{4C^2}{\varepsilon_0}\sup_{t\in[0,T^*]}\left\|\mathbf{u}_2(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+$$

$$+\left(\frac{2\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{g}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}}{\varepsilon_1 k_0^2}+\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\right)\times$$

$$\left(\nu^2+\sup_{t\in[0,T^*]}\left\|\mathbf{u}_1(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}+\sup_{t\in[0,T^*]}\left\|\mathbf{u}_2(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\right);$$

$$a_2:=\frac{K_0^2}{\nu}+\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}K_0^2+\frac{2\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{g}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}}{\varepsilon_1 k_0^2}K_0^2+\frac{4K_0^2}{\varepsilon_0};$$

$$a_3:=\frac{1}{k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{g}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\left(1+\frac{4\varkappa^2}{\varepsilon_0}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\right).$$

Енді $\mathbf{u}_i,\ i=1,2,$ *функциялары және әлсіз шешім үшін алынған бағалауларда* $\frac{\varkappa}{k_0^2}\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{g}(t)\right\|_{2,\Omega}^{2}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|_{\mathbf{V}}^{2}\leqslant m<2$ *шарты кезіндегі* $\varepsilon_i, i=0,1$ *сәйкес мәнінде* α,β,a_1,a_2,a_3 *коэффициенттері оң және ақырлы болып табылады. Олай болса, (1.69) өрнекті* τ *бойынша* $0-$*ден* $t\in[0,T^*]-$*ға шейін интегралдасақ, онда келесі теңсіздік қорытылады*

$$y(t)\leqslant a\int\limits_0^t y(\tau)d\tau,\tag{1.70}$$

мұндағы

$$y(t) := \|\mathbf{u}(t)\|^2_{2,\Omega} + (\varkappa+\nu)\,\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{V}}\,, \quad a := \max\left\{\frac{1}{\varkappa+\nu}(a_1+Ta_2), a_3\right\}.$$

1.3-теореманың шарты мен Гронуолл леммасы бойынша (1.70) өрнектен $t \in [0, T^*]$ үшін $y(t) \equiv 0$ тұжырымдалады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$.

Қорыта келе, әлсіз шешімнің бар болуы туралы 1.1-теореманы, әлді шешімнің бар болуы туралы 1.2-теореманы және шешімнің жалғыздығы туралы 1.3-теореманы ескере отырып, сондай-ақ (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебінің (1.1)-(1.5) кері есебіне эквиваленттілігі туралы 1.1-леммаға сүйеніп бастапқы қойылған кері есеп үшін келесі нәтижелер тұжырымдалады.

Теорема 1.4. *Айталық, (1.7)-(1.12) шарттар орындалсын және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын*

$$\frac{\varkappa}{k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}\,\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathbf{V}} \leqslant m < 2. \tag{1.71}$$

Онда ақырлы $T_1 \in (0, T]$ уақыты табылып, (1.1)-(1.5) кері есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, мұндағы T_1 мәні (1.35) өрнекпен анықталады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})} + \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V})} + \|\mathbf{u}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})} + \|f\|^2_{L^2[0,T_1]} \leqslant C, \tag{1.72}$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Теорема 1.5. *Айталық, 1.4-теореманың шарттары және (1.49) шарт орындалсын. Олай болса, (1.1)-(1.5) кері есебінің Q_{T_1} цилиндрінде кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол (1.72) бағалауға қоса*

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|\mathbf{u}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_1;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|f\|^2_{L^2[0,T_1]} \leqslant C < \infty. \tag{1.73}$$

бағалау орынды болады, мұндағы T_1 мәні (1.35) өрнектен белгілі және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Теорема 1.6. *Айталық, 1.4-теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ функциялары (1.1)-(1.5) есебінің бірдей берілгендері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз (әлді) шешімі болсын. Онда барлық $(x,t) \in Q_{T^*}$ үшін (1.1)-(1.5) есебінің әлсіз (әлді) шешім жалғыз болады, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұндағы T^*- әлсіз (әлді) шешімнің бар болуының максималды уақыты.*

1.2. Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

Бұл параграфта (1.1)-(1.5) кері есебінің дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесінде конвективті мүшесі болмағанда уақыт бойынша глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді. Сондай-ақ, (1.19) өрнектегі априорлық бағалаудың уақыт бойынша глобалды екенін дәлелдеудің негізгі қиындығы $F(\mathbf{u}, t)$ функциясының (1.14) және (1.13) өрнектер бойынша анықтамасында $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}$ сызықты емес конвективті мүшенің отыруы. Жоғарыда қарастырылған кері есептің сызықты жағдайда глобалды шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы [73, 74] жұмыстарда зерттелінді. Алайда, қарастырылып отырған кері есептердің уақыт бойынша глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы есептің берілгендеріне шектеу қою арқылы тұжырымдалады. Сызықты Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, s)ds - \nabla p = f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \tag{1.74}$$

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \tag{1.75}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.76}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \tag{1.77}$$

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}\omega\mathbf{dx} = e(t), \;\; t \in [0, T] \tag{1.78}$$

Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орынды болсын. Онда (1.74)-(1.78) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есебі (1.76) бастапқы және (1.77) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds + \nabla p = \\ F_2(\mathbf{u}, t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \;\; \mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T,\end{gathered} \tag{1.79}$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_2(\mathbf{u}, t)$ функционалы

$$\begin{gathered}F_2(\mathbf{u}, t) := \frac{1}{g_0(t)} \Big(e'(t) + \varkappa\, (\nabla\mathbf{u}_t(t), \nabla\omega)_{2,\Omega} + \\ \nu\, (\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\omega)_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s)\, (\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\omega)_{2,\Omega}\, ds \Big)\end{gathered} \tag{1.80}$$

өрнекпен анықталады.

Лемма 1.2. *Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Онда (1.74)-(1.78) кері есебі (1.79), (1.76), (1.77) тура есебіне эквивалентті.*

Дәлелдеуі 5. *Бұл лемма аналогты түрде 1.1-лемма секілді дәлелденеді.*

Енді (1.79), (1.76), (1.77) тура есебінің әлсіз шешімінің бар болуы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 1.7. *Айталық, (1.7)-(1.12) және (1.18) шарттар орындалсын. Онда Q_T цилиндрінде (1.79), (1.76), (1.77) тура есебінің $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ әлсіз шешімі бар болады, соңымен бірге 1.2-лемма бойынша оған эквивалентті (1.74)-(1.78) кері есебінің әлсіз шешімі табылады және ол барлық $t \in (0,T]$ үшін (1.72) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 6. *Соңғы тұжырым аналогты түрде (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімділігі секілді (1.74)-(1.78) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (1.79), (1.76), (1.77) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0,T]$ үшін (1.19) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 1.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі. Демек, конвективті мүше болмаған жағдайда (1.25) және (1.26) өрнектерін ескеріп және оларды біріктірсек, онда*

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + (\nu+\varkappa)\,\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}\right) + \nu\,\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \\
\|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\,\|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} = -\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s),\nabla\mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} ds - \\
\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s),\nabla\mathbf{u}^n_t(t)\right)_{2,\Omega} ds + F_2(\mathbf{u},t)\left(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}^n_t(t)\right)_{2,\Omega} + \\
F_2(\mathbf{u}^n,t)\left(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega}.
\end{gathered} \tag{1.81}
$$

теңдігі алынады, мұндағы $F_2(\mathbf{u}^n,t)$ функционалы (1.80) өрнекпен анықталған және

$$
\begin{gathered}
|F_2(\mathbf{u}^n,t)| \leqslant \frac{1}{k_0}\left[|e'(t)| + \varkappa\,\|\mathbf{u}^n_t\|_{\mathbf{V}}\,\|\omega\|_{\mathbf{V}} + \right. \\
\left.\nu\,\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}\,\|\omega\|_{\mathbf{V}} + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\,K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right].
\end{gathered} \tag{1.82}
$$

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.81) теңдіктің оң жағын бағалау үшін бірінші және екінші қосылғыштарға, сәйкесінше, (1.28) және (1.29) бағалауларды қолданып, ал үшінші және төртінші қосылғыштарын, сәйкесінше, (1.30) және (1.31) *бағалауларын негізге ала отырып (1.82) өрнекті бірге ескеріп бағалағанда*

$$z(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa)\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2$$

функциясы үшін келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned} & z'(t) + \nu\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \alpha\,\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \beta\,\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant \\ & C_1 \int\limits_0^t z(s)ds + C_2 z(t) + C_3(t), \end{aligned} \tag{1.83}$$

мұндағы

$$\alpha := 2\left(1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}\right);\ \beta := 2\left(\varkappa - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varkappa^3}{\varepsilon_2 k_0^2} \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2\right);$$

$$C_1 := \frac{1}{\nu + \varkappa}\left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_1} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2\right);$$

$$C_2 := \frac{1}{\nu + \varkappa}\left(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \frac{2\nu^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2\right);$$

$$C_3(t) := \frac{2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \left|e'(t)\right|^2.$$

Енді $\varepsilon_2 = \dfrac{2e^{\varepsilon} - 1}{e^{\varepsilon}}; \varepsilon_3 = \dfrac{\sin\varepsilon}{e^{\varepsilon}};\quad \varepsilon \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *таңдасақ және* $\varepsilon_1 -$*дің сәйкес мәні үшін* $\dfrac{\varkappa}{k_0^2} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant m < 2$ *теңсіздігінің жоғарғы шекарасын* $m-$*нен* $2-$*ге дейін кеңейтуге болады. Алайда,* ε_1 *саны* $m > 2$ *болатындай таңдалмауы керек, себебі* $\alpha > 0$ *болғандығынан* $\varepsilon_2 < 2$.

Енді (1.83) өрнекті s *бойынша* $0-$*ден* $t-$*ға шейін интегралдап, (1.24) өрнекті қолдансақ, келесі интегралдық теңсіздік шығады*

$$\begin{aligned} & z(t) + \nu\,\|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 + \alpha\,\|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \beta\,\|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leqslant \\ & C_5 \int\limits_0^t z(s)ds + C_6, \end{aligned} \tag{1.84}$$

мұндағы

$$C_4 = C_1 T + C_2;\ C_5 = 1 + \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + (\varkappa + \nu)\,\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \int\limits_0^t C_3(s)ds.$$

Сөйтіп, (1.84) өрнектің сол жағындағы екінші, үшінші және төртінші қосылғыштарды ескермей сызықты Гронуолл теңсіздігін қолданғанда

$$z(t) \leqslant C_5 e^{C_4 T} \tag{1.85}$$

бағалауы тұжырымдалады.

Егер (1.85) бағалауды (1.84) өрнектің оң жағына ескеріп, сондай-ақ, екі жағынан $t \in [0,T]$ бойынша супремум алсақ, онда келесі әлсіз шешім үшін априорлық бағалау қорытылады

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + (\nu + \varkappa) \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V})} + \\ &\alpha \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(Q_T)} + \beta \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \leqslant M := M(T, C_4, C_5). \end{aligned} \tag{1.86}$$

Теорема 1.8. *Айталық, 1.7-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (1.49) шарт орынды болсын. Онда (1.79), (1.76), (1.77) тура есебінің әлді шешімі бар болады сонымен бірге 1.2-лемма бойынша оған эквивалентті (1.74)-(1.78) кері есебінің әлді шешімі табылады және ол барлық $t \in (0,T]$ үшін (1.73) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 7. *Бұл теорема дәлелдеу үшін (1.79), (1.76), (1.77) тура есебінің әлді шешімі барлық $t \in (0,T]$ үшін (1.50) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Дәлелдеу алгоритмі 1.2-теореманың дәлелдеуіне ұқсас түрде жүргізіледі.*

Демек, (1.52) өрнегіне аналогты энергетикалық теңдік келесі түрде болады

$$\begin{aligned} &\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|^2_{2,\Omega} + \varkappa \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n_t(t)\right\|^2_{2,\Omega} + \|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} = \\ &-\int\limits_0^t K(t-s)\left(\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s), \widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n_t(t)\right)_{2,\Omega} ds + F_2(\mathbf{u}^n, t)\left(\mathbf{g}, -\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n_t(t)\right)_{2,\Omega}, \end{aligned} \tag{1.87}$$

Енді (1.87) оң жағын бағалау үшін Гельдер және Юнг теңсіздіктерін (1.82) өрнекпен бірге қолданғанда

$$\begin{aligned} &\nu\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|^2_{2,\Omega} + \varkappa \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n_t(t)\right\|^2_{2,\Omega} + \|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} \leqslant \\ &\frac{2}{\varkappa}\left[K_0^2 \int\limits_0^t \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|^2_{2,\Omega} ds + |F_2|^2 \|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}\right]. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Сөйтіп, (1.88) өрнекті s бойынша 0−ден t−ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды ескерсек, онда төмендегі *интегралдық теңсіздік алынады*

$$\nu \left\|\mathbb{A}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int\limits_0^t \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \nu \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (1.89)$$

мұндағы

$$C_7 := \nu \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \int\limits_0^T |F_2(s)|^2 ds < \infty,$$

$$C_8 := \frac{2}{\nu\varkappa} K_0^2 T < \infty.$$

Демек, (1.89) өрнекке Гронуолл теңсіздігін ескерсек, онда келесі бағалау алынады

$$\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \frac{1}{\nu} C_7 e^{C_8 T}, \quad \forall t \in (0,T) \quad (1.90)$$

Егер (1.89) өрнектің екі жағынан $t \in [0,T]$ бойынша супремум алып және (1.90) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n\right\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}^2 \leqslant C := C(\nu, \varkappa, C_7, C_8, T) < \infty. \quad (1.91)$$

(1.74)-(1.78) кері есебінің жалғыздығы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 1.9. *Айталық, 1.7-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.74)-(1.77), (1.80) есебінің әлсіз шешімі жалғыз болады.*

Дәлелдеуі 8. *Бұл тұжырымның дәлелдеуі 1.3-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде тұжырымдалады, сондықтан дәлелдеусіз қалдырдық.*

1.3. Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

Бұл параграфта (1.1)-(1.5) кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы есептің берілгендеріне қойылған (1.18) шарттың көмегінсіз тұжырымдалады. Ол тек (1.1) теңдеулер жүйесінің оң жағын арнайы түрде $\mathbf{g}(\mathbf{x},t) := \omega(\mathbf{x})$ деп жеке жағдайын қарастырған да ғана (1.18) шарттан құтылуға болады. Оң жағы арнайы түрдегі сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},s)ds - \nabla p = f(t)\omega(\mathbf{x}) \tag{1.92}$$

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in Q_T \tag{1.93}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.94}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in\Gamma_T \tag{1.95}$$

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}\omega\mathbf{dx} = e(t),\ \ t\in[0,T] \tag{1.96}$$

Айталық, (1.9), (1.10) және

$$\omega\neq 0, \quad \forall\mathbf{x}\in\Omega. \tag{1.97}$$

шарттар орынды болсын.

Демек, қарастырылып отырған (1.92)-(1.96) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есеп келесі түрде болады, яғни (1.94) бастапқы және (1.95) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds + \nabla p = \\ F_3(\mathbf{u},t)\omega(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=0,\ \ (\mathbf{x},t)\in Q_T,\end{gathered} \tag{1.98}$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_3(\mathbf{u},t)$ функционалы

$$\begin{aligned} F_3(\mathbf{u},t) := \frac{1}{\omega_0}\Big(& e'(t) + \varkappa\left(\nabla\mathbf{u}_t(t),\nabla\omega\right)_{2,\Omega} + \nu\left(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\omega\right)_{2,\Omega} - \\ & \left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\omega,\mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\omega\right)_{2,\Omega}ds\Big)\end{aligned} \tag{1.99}$$

өрнегімен анықталады және $\omega_0 = \|\omega\|^2_{2,\Omega} > 0$ тұрақты.

Лемма 1.3. *Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Онда (1.92)-(1.96) кері есебі (1.98), (1.94), (1.95) тура есебіне эквивалентті.*

Дәлелдеуі 9. *Бұл лемма аналогты түрде 1.1-лемма секілді дәлелденеді.*

Енді (1.98), (1.94), (1.95) тура есебінің әлсіз шешімінің бар болуы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 1.10. *Айталық, (1.7), (1.11)-(1.12) және (1.97) шарттар орындалсын. Онда ақырлы $T_2 \in (0, T]$ уақыты табылып, (1.79), (1.76), (1.77) локалды емес тура есебінің Q_{T_2} цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, сонымен бірге 1.3-лемма бойынша эквивалентті (1.92)-(1.96) кері есебінің де әлсіз шешімі бар болады және ол барлық $t \in (0, T_2]$ үшін (1.72) бағалауды қанағаттандырады, мұндағы T_2 мәні төменде (1.107) өрнекпен анықталады.*

Дәлелдеуі 10. *Жоғарыдағы тұжырым аналогты түрде (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімділігі секілді (1.92)-(1.96) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (1.98), (1.94), (1.95) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0, T]$ үшін (1.72) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 1.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі.*

Демек, (1.25) және (1.26) өрнектеріне аналогты энергетикалық теңдіктерге алып және оларды біріктірсек, онда

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) + \nu\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = -\int_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} ds - \\ \int_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + F_3(\mathbf{u}^n(t), t)e(t) + \\ F_3(\mathbf{u}^n(t), t)e'(t) + \left(\left(\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega}\end{gathered} \tag{1.100}$$

теңдігі алынады, мұндағы $F_3(\mathbf{u}^n, t)$ функционалы (1.99) өрнекпен анықталған және

$$\begin{gathered}|F_3(\mathbf{u}^n, t)| \leqslant \frac{1}{k_0}\left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\left(\varkappa\|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \nu\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \right.\right. \\ \left.\left. C^2(\Omega)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0\left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right].\end{gathered} \tag{1.101}$$

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.100) теңдіктің оң жағын бағалау үшін ең алдымен, үшінші және төртінші қосылғыштарға, сәйкесінше, (1.30) және (1.31) бағалауларды (1.101) өрнекпен бірге пайдаланып бағаласақ, онда келесі

$$
\begin{aligned}
&|F_3(\mathbf{u}^n,t)e(t)| \leqslant \frac{|e(t)|}{\omega_0}\left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\left(\varkappa \|\mathbf{u}^n_t\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \right.\right.\\
&\left.\left. C^2\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} + K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant \frac{1}{2\omega_0}\left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2\right) + \\
&\frac{\varkappa}{8}\|\mathbf{u}^n_t\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{2\varkappa|e(t)|^2}{\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{\nu^2|e(t)|^2}{2\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n\|^4_{\mathbf{V}}\\
&+\frac{C^4}{2\omega_0^2}|e(t)|^2\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2}|e(t)|^2\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds.
\end{aligned}
\tag{1.102}
$$

$$
\begin{aligned}
&|F_3(\mathbf{u}^n,t)e'(t)| \leqslant \frac{|e'(t)|}{\omega_0}\left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\left(\varkappa \|\mathbf{u}^n_t\|_{\mathbf{V}} + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \right.\right.\\
&\left.\left. C^2\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} + K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant \frac{1}{\omega_0}|e'(t)|^2 + \frac{\varkappa}{8}\|\mathbf{u}^n_t\|^2_{\mathbf{V}} + \\
&\frac{2\varkappa|e'(t)|^2}{\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{\nu^2|e'(t)|^2}{2\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n\|^4_{\mathbf{V}}\\
&+\frac{C^4}{2\omega_0^2}|e'(t)|^2\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2}|e'(t)|^2\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds,
\end{aligned}
\tag{1.103}
$$

теңсіздіктер қорытылады, сондай-ақ, $\varepsilon_1 := \frac{\varkappa}{2}$ жағдайда бірінші, екінші және бесінші қосылғыштарға, сәйкесінше, (1.28), (1.29) және (1.32) бағалауларды ескерсек, онда

$$z(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + (\nu + \varkappa)\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}$$

функциясы үшін келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$
\begin{aligned}
&z'(t) + \nu\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} \leqslant\\
&C_1\int\limits_0^t z(s)ds + C_2 z(t) + C_3 z^2(t) + C_4(t)
\end{aligned}
\tag{1.104}
$$

мұндағы

$$C_1 := \frac{1}{\nu+\varkappa}\left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{4k_0^2}{\varkappa} + 2\right); \quad C_2 := \frac{2}{\nu+\varkappa}; \; C_3 := \frac{1}{\nu+\varkappa}\left(2 + \frac{4C^2(\Omega)}{\varkappa}\right)$$

$$C_4(t) := \frac{1}{\omega_0}\left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2\right) + \frac{2}{\omega_0}|e'(t)|^2 +$$
$$\frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{\omega_0^2}\left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2\right)\left(4\varkappa + \nu^2 + C^4(\Omega) + K_0^2\right)$$

Енді (1.104) өрнекті s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап, (1.24) өрнекті ескерсек, онда

$$z(t) + \nu\|\mathbf{u}^n\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V})} + \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(Q_T)} + \varkappa\|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \leqslant$$
$$C_5\int\limits_0^t z^2(s)ds + C_6, \tag{1.105}$$

мұндағы

$$C_5 = \max\{C_1T + C_3; C_2\}; C_6 = 1 + \|\mathbf{u}_0\|^2_{2,\Omega} + (\varkappa+\nu)\|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathbf{V}} + \int\limits_0^t C_4(s)ds.$$

Әрі қарай $z(t)$ функциясы үшін 1-леммадағы сызықтық емес Гронуолл теңсіздігін қолданғанда, онда (1.104) өрнектен келесі бағалау қорытылады

$$z(t) \leqslant \frac{C_6}{1 - C_5C_6t} \equiv K_2 < \infty \tag{1.106}$$

және төмендегі уақыт аралығы үшін орынды

$$0 \leqslant t \leqslant T_2 < T_\star := \frac{1}{C_5C_6}. \tag{1.107}$$

Демек, кез келген $t \leqslant T_2 < T_\star$ үшін (1.106) өрнектен келесі бағалау орынды екенін көруге болады

$$\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + (\nu+\varkappa)\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} \leqslant K_2. \tag{1.108}$$

(1.37) бағалауды (1.104) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_2]$ бойынша супремум алғанда, келесі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t\in[0,T_2]}\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}\right) + \|\mathbf{u}^n\|^2_{L^2(0,T_2;\mathbf{V})} + \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(Q_{T_2})} +$$
$$\|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(0,T_2;\mathbf{V})} \leqslant C := C(\nu, \varkappa, T_2, K_2, C_5, C_6). \tag{1.109}$$

Теорема 1.11. *Айталық, 1.10-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (1.49) шарт орынды болсын. Онда (1.98), (1.94), (1.95) тура есебінің әлді шешімі бар болады, сонымен бірге 1.3-лемма бойынша оған эквивалентті (1.92)-(1.96) кері есебінің әлді шешімі табылады және ол барлық $t \in (0, T_2]$ үшін (1.73) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 11. *Демек, (1.52) өрнегіне аналогты энергетикалық теңдік келесі түрде болады*

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{\mathbf{V}}^2=$$
$$-\left(\left(\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n(t),\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)-\int\limits_0^t K(t-s)\left(\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s),\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}ds+$$
$$F_3(\mathbf{u}^n,t)\left(\omega,-\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}:=I_7, \tag{1.110}$$

Соңғы өрнектің оң жағын бағалау үшін Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (1.101) бағалауды бірге қолданайық, демек,

$$|I_7|\leqslant\frac{\varkappa}{2}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{3}{2\varkappa}\left[C\left\|\mathbf{u}^n(t)\right\|_{\mathbf{V}}^2\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\right.$$
$$\left.K_0^2\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+|F_3|^2\left\|\omega\right\|_{2,\Omega}^2\right]. \tag{1.111}$$

(1.111) бағалауды (1.110) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\nu\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{\mathbf{V}}^2\leqslant\frac{3}{\varkappa}\left[C\left\|\mathbf{u}^n(t)\right\|_{\mathbf{V}}^2\right.$$
$$\left.\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+K_0^2\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+|F_3|^2\left\|\omega\right\|_{2,\Omega}^2\right]. \tag{1.112}$$

Енді (1.112) өрнекті s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds\leqslant C_7+C_8\int\limits_0^t\nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds, \tag{1.113}$$

мұндағы

$$C_7:=\nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{3}{\varkappa}\left\|\omega\right\|_{2,\Omega}^2\int\limits_0^{T_2}|F_3(s)|^2ds<\infty,$$

$$C_8:=\frac{3}{\nu\varkappa}\left(C(\Omega)\sup_{t\in[0,T_2]}\left\|\mathbf{u}^n(t)\right\|_{\mathbf{V}}^2+K_0^2T\right)<\infty.$$

Мұнан кейін, (1.113) *өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,*

$$\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \frac{1}{\nu}C_7 e^{C_8 T_2}, \quad \forall t \in (0, T_2) \tag{1.114}$$

бағалауы қорытылады. Егер (1.113) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_2]$ *бойынша супремум алып және (1.114) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады*

$$\sup_{t\in[0,T_2]}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n\right\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_2})}^2 \leqslant C := C(\nu, \varkappa, C_7, C_8, T_2) < \infty. \tag{1.115}$$

Теорема 1.12. *Айталық, 1.10-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.92)-(1.95), (1.99) есебінің әлсіз шешімі жалғыз болады.*

Дәлелдеуі 12. *Бұл тұжырымның дәлелдеуі 1.3-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде тұжырымдалады.*

1.4. Глобалды шешілімді болатын интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

Бұл тармақта (1.1)-(1.5) кері есебінің дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесінде конвективті мүшесі болмағанда және оң жағын арнайы түрде таңдағанда глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді. Берілген теңдеулер жүйесінде оң жағын $\mathbf{g}(\mathbf{x},t) := \omega(\mathbf{x})$ болғанда (1.18) шарттан құтылуға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, (1.1) теңдеудің сызықты жағдайын қарастыру (2.18) өрнектегі априорлық бағалаудың уақыт бойынша глобалды орынды екенін дәлелдеуге мүмкіндік береді. Жоғарыда қарастырылған отырған кері есептің сызықты жағдайда глобалды шешімнің бар болуы мен жалғыздығы [73, 74] жұмыстарда зерттелінді. Алайда, қарастырылып отырған кері есептердің глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы есептің берілгендеріне шектеу қою арқылы тұжырымдалады. Демек, сызықты әрі оң жағы арнайы түрдегі Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},s)ds - \nabla p = f(t)\omega(\mathbf{x}) \tag{1.116}$$

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in Q_T \tag{1.117}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.118}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in\Gamma_T \tag{1.119}$$

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}\omega\mathbf{dx} = e(t),\ t\in[0,T] \tag{1.120}$$

Айталық, (1.8), (1.10), (1.97) шарттар орындалсын. Сөйтіп, қарастырылып отырған (1.116)-(1.120) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есеп келесі түрде болады, яғни (1.118) бастапқы және (1.119) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds + \nabla p = \\ F_4(\mathbf{u},t)\omega(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0,\ \ (\mathbf{x},t)\in Q_T,\end{gathered} \tag{1.121}$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_4(\mathbf{u},t)$ функционалы

$$\begin{gathered}F_4(\mathbf{u},t) := \frac{1}{\omega_0}\Big(e'(t) + \varkappa\left(\nabla\mathbf{u}_t(t),\nabla\omega\right)_{2,\Omega} + \\ \nu\left(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\omega\right)_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\omega\right)_{2,\Omega} ds\Big)\end{gathered} \tag{1.122}$$

өрнегімен анықталады және $\omega_0 = \|\omega\|_{2,\Omega}^2 > 0$ тұрақты.

Лемма 1.4. *Айталық, (1.8), (1.10)-(1.11) және (1.97) шарттар орындалсын. Онда (1.116)-(1.120) кері есебі (1.121), (1.118), (1.119) тура есебіне эквивалентті.*

Дәлелдеуі 13. *Бұл лемма аналогты түрде 1.1-лемма секілді дәлелденеді.*

Енді (1.121), (1.118), (1.119) тура есебінің әлсіз шешімінің бар болуы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 1.13. *Айталық, (1.7), (1.10)-(1.12) шарттар орындалсын. Онда Q_T цилиндрінде (1.121), (1.118), (1.119) тура есебінің $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ әлсіз шешімі бар болады, сондай-ақ 1.4-лемма бойынша эквивалентті (1.116)-(1.120) кері есебінің де әлсіз шешімі табылады және ол барлық $t \in (0,T]$ үшін (1.72) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 14. *Соңғы тұжырым аналогты түрде (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімділігі секілді (1.116)-(1.120) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (1.121), (1.118), (1.119) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0,T]$ үшін (1.19) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 1.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі.*

Демек, (1.25) және (1.26) өрнектеріне аналогты энергетикалық теңдіктерге алып және оларды біріктірсек, онда

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu+\varkappa)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) + \nu\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = -\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} ds - \\
\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + F_4(\mathbf{u},t)e(t) + F_4(\mathbf{u}^n,t)e'(t).
\end{gathered}
\tag{1.123}
$$

теңдігі алынады, мұндағы $F_4(\mathbf{u}^n,t)$ функционалы (1.122) *өрнекпен анықталған және*

$$
\begin{gathered}
|F_4(\mathbf{u}^n,t)| \leqslant \frac{1}{\omega_0}\Big[|e'(t)| + \varkappa\|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}}\|\omega\|_{\mathbf{V}} + \\
\nu\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}\|\omega\|_{\mathbf{V}} + \|\omega\|_{\mathbf{V}} K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\Big].
\end{gathered}
\tag{1.124}
$$

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.123) теңдіктің оң жағын бағалау үшін ең алдымен, үшінші және төртінші қосылғыштарға, сәйкесінше, (1.30) және (1.31) бағалау-

ларды (1.124) өрнекпен бірге пайдаланып бағаласақ, онда келесі

$$|F_4(\mathbf{u}^n,t)e(t)| \leqslant \frac{|e(t)|}{\omega_0}\left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\left(\varkappa\|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\nu\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant \frac{1}{2\omega_0}\left(|e(t)|^2 + \right.$$
$$\left.|e'(t)|^2\right) + \frac{\varkappa}{8}\|\mathbf{u}_t^n\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{2\varkappa|e(t)|^2}{\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} + \tag{1.125}$$
$$\frac{\nu^2|e(t)|^2}{2\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2}|e(t)|^2\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds.$$

$$|F_4(\mathbf{u}^n,t)e'(t)| \leqslant \frac{|e'(t)|}{\omega_0}\left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\left(\varkappa\|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\nu\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant \frac{1}{\omega_0}|e'(t)|^2 +$$
$$\frac{\varkappa}{8}\|\mathbf{u}_t^n\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{2\varkappa|e'(t)|^2}{\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} + \tag{1.126}$$
$$\frac{\nu^2|e'(t)|^2}{2\omega_0^2}\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2}|e'(t)|^2\|\omega\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds,$$

теңсіздіктер қорытылады, сондай-ақ, $\varepsilon_1 := \frac{\varkappa}{2}$ *жағдайда бірінші және екінші қосылғыштарға, сәйкесінше, (1.28) және (1.29) бағалауларды ескерсек, онда*

$$y(t) := \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + (\nu+\varkappa)\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}$$

функциясы үшін келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$y'(t) + \nu\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\|\mathbf{u}_t^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} \leqslant$$
$$C_1\int\limits_0^t y(s)ds + C_2 y(t) + C_3(t) \tag{1.127}$$

мұндағы

$$C_1 := \frac{1}{\nu+\varkappa}\left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{4k_0^2}{\varkappa} + 2\right); \quad C_2 := \frac{2}{\nu+\varkappa};$$
$$C_3(t) := \frac{1}{\omega_0}\left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2\right) + \frac{2}{\omega_0}|e'(t)|^2 +$$

$$\frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{\omega_0^2}\left(|e(t)|^2+|e'(t)|^2\right)\left(4\varkappa+\nu^2+K_0^2\right)$$

Енді (1.127) *өрнекті* s *бойынша* $0-$*ден* $t-$*ға шейін интегралдап,* (1.24) *өрнекті ескерсек, онда*

$$y(t)+\nu\left\|\mathbf{u}^n\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2+\left\|\mathbf{u}_t^n\right\|_{L^2(Q_T)}^2+\varkappa\left\|\mathbf{u}_t^n\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2\leqslant C_4\int\limits_0^t y(s)ds+C_5, \tag{1.128}$$

мұндағы

$$C_4=C_1T+C_2;C_5=\left\|\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}^2+(\varkappa+\nu)\left\|\mathbf{u}_0\right\|_{\mathbf{V}}^2+\int\limits_0^t C_3(s)ds.$$

Сөйтіп, (1.127) *өрнектің сол жағындағы екінші, үшінші және төртінші қосылғыштарды ескермей сызықты Гронуолл теңсіздігін қолданғанда*

$$y(t)\leqslant C_5e^{C_4T} \tag{1.129}$$

бағалауы тұжырымдалады.

Егер (1.129) *бағалауды* (1.127) *өрнектің оң жағына ескеріп, сондай-ақ, екі жағынан* $t\in[0,T]$ *бойынша супремум алсақ, онда келесі әлсіз шешім үшін априорлық бағалау қорытылады*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+(\nu+\varkappa)\sup_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{u}^n(t)\right\|_{\mathbf{V}}^2+\nu\left\|\mathbf{u}^n\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2+\left\|\mathbf{u}_t^n\right\|_{L^2(Q_T)}^2+\varkappa\left\|\mathbf{u}_t^n\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2\leqslant M:=M(T,C_4,C_5). \tag{1.130}$$

Теорема 1.14. *Айталық,* 1.13*-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар,* (1.49) *шарт орынды болсын. Онда* (1.121), (1.118), (1.119) *тура есебінің әлді шешімі бар болады, сондай-ақ* 1.4*-лемма бойынша эквивалентті* (1.116)-(1.120) *кері есебінің де әлді шешімі табылады және ол барлық* $t\in(0,T]$ *үшін* (1.73) *бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 15. *Демек,* (1.52) *өрнегіне аналогты энергетикалық теңдік келесі түрде болады*

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{\mathbf{V}}^2=-\int\limits_0^t K(t-s)\left(\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s),\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}ds+F_4(\mathbf{u}^n,t)\left(\omega,-\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}=I_8, \tag{1.131}$$

Соңғы өрнектің оң жағын бағалау үшін Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (1.124) бағалауды бірге қолданайық, демек,

$$|I_8| \leqslant \frac{\varkappa}{2} \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\varkappa} \left[K_0^2 \int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_4|^2 \|\omega\|_{2,\Omega}^2 \right]. \qquad (1.132)$$

(1.132) бағалауды (1.131) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\begin{gathered} \nu \frac{d}{dt} \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant \\ \frac{2}{\varkappa} \left[K_0^2 \int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_4|^2 \|\omega\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{gathered} \qquad (1.133)$$

Енді (1.133) өрнекті s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int\limits_0^t \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds \leqslant C_6 + C_7 \int\limits_0^t \nu \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (1.134)$$

мұндағы

$$C_6 := \nu \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \|\omega\|_{2,\Omega}^2 \int\limits_0^T |F_4(s)|^2 ds < \infty,$$

$$C_7 := \frac{3}{\nu \varkappa} \left(C(\Omega) \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 T \right) < \infty.$$

Мұнан кейін, (1.134) *өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,*

$$\left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \frac{1}{\nu} C_6 e^{C_7 T}, \quad \forall t \in (0,T) \qquad (1.135)$$

бағалауы қорытылады. Егер (1.134) өрнектің екі жағынан $t \in [0,T]$ бойынша супремум алып және (1.135) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0,T]} \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}^2 \leqslant C := C(\nu, \varkappa, C_6, C_7, T) < \infty. \qquad (1.136)$$

Теорема 1.15. *Айталық, 1.13-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.116)-(1.119), (1.122) есебінің әлсіз шешімі жалғыз болады.*

Дәлелдеуі 16. *Бұл тұжырымның дәлелдеуі 1.3-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде тұжырымдалады.*

2 АРНАЙЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ҚОСЫМША ШАРТПЕН ҚОЙЫЛҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІ ҮШІН КЕРІ ЕСЕПТЕР

Бұл бөлімде арнайы қосымша шартпен қойылған сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есептердің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы зерттеліneді.

Есептің қойылымы. Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(x, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, s)ds - \nabla p = f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \tag{2.1}$$

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\boldsymbol{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \tag{2.2}$$

сығылмайтын сұйықтық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.3}$$

бастапқы шартын,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \tag{2.4}$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{u}\boldsymbol{\omega} + \varkappa\nabla\mathbf{u}\nabla\boldsymbol{\omega})d\mathbf{x} = e(t),\ t \in [0, T], \tag{2.5}$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, ..., u_d)-$ сұйықтықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)-$ сұйықтықтың қысымы болып табылады, ал ν және $\varkappa$ оң коэффициенттері, сәйкесінше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы және релаксациясын, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ вектор функциясындағы $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_0(x)$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $e(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар.

Анықтама 2.1. *(2.1)-(2.5) кері есебінің әлсіз шешімі деп*

1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}),\ \mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}),\ f(t) \in L^2[0, T]$*;*

2 $\Omega-$*да барлық дерлік жерде* $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$ *бастапқы шартты;*

3 *Кез келген* $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{V}$ *және барлық* $t\in(0,T)$ *үшін келесі интегралдық теңдікті*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\Big((\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}+\varkappa(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}\Big)+\nu(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}=\\ f(t)(\mathbf{g}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}-((\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}-\\ \int\limits_0^t K(t-s)(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\varphi})_{2,\Omega}\,ds.\end{gathered}\tag{2.6}$$

қанағаттандыратын $(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),f(t))$ *функциялар жұбын атайды.*

Анықтама 2.2. *(2.1)-(2.5) кері есебінің әлді шешімі деп*

1 $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))\cap\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_t\in\mathbf{L}^2(0,T;\mathbf{V})$, $f(t)\in L^2[0,T]$*;*

2 *әрбір теңдеуді сәйкес облыстарда барлық дерлік жерде қанағаттандыратын*

$(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),f(t))$ *функциялар жұбын атайды.*

Ескерту 2.1. *Әдеттегідей, әлсіз шешімінің анықтамасында p қысым туралы мағлұмат келтірілмеген. Оны [70] мақаладағыдай* $\mathbf{u}$ *және* f *функциялары белгілі болғаннан кейін де Рам леммасын қолданып, (2.2) теңдеуден жалғыз түрде қалпына келтіруге болады.*

Кері есепті қайта тұжырымдау: эквивалентті локалды емес тура есеп Кері есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\in\mathbf{V};\tag{2.7}$$

$$\exists k_0\in\mathbb{R}:0<k_0<\infty,\quad |g_0(t)|=\Big|(\mathbf{g}(t),\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\Big|\geqslant k_0>0,\ \forall t\geqslant 0;\tag{2.8}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\in\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega));\tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\in\mathbf{V},\ e(t)\in W_2^1([0,T]);\tag{2.10}$$

$$(\mathbf{u}_0,\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}+\varkappa(\nabla\mathbf{u}_0,\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}=e(0);\tag{2.11}$$

$$K(t)\in L^2([0,T]):\quad \|K(t)\|_{L^2([0,T])}\equiv K_0<\infty.\tag{2.12}$$

Енді (2.1) теңдеуді $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ функциясына көбейтіп және Ω облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнекті бөліктеп интегралдап, сондай-ақ (3.4) қосымша және (2.8) шартты қолданғанда, онда $f(t)$ функциясы табылады

$$\begin{gathered}f(t)=\frac{1}{g_0(t)}\Big(e'(t)+\nu(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}-\\ ((\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t))_{2,\Omega}+\int\limits_0^t K(t-s)(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\,ds\Bigg):=F_5(\mathbf{u},t).\end{gathered}\tag{2.13}$$

Демек, (2.13) өрнекті (2.1) теңдеуге қойғанда, онда белгісіз $\mathbf{u}$ және p функцияларын табуға арналған

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds - \nabla p = \tag{2.14}$$
$$F_5(\mathbf{u},t)\mathbf{g}(\mathbf{x},t), \quad \boldsymbol{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \ (\mathbf{x},t) \in Q_T,$$

теңдеулер жүйесін, (2.3) бастапқы шартты және (2.4) шекаралық шартты қанағаттандыратын локалды емес тура есеп тұжырымдалады, мұндағы $F_5(\mathbf{u},t) = f(t)$ функциясы (2.13) өрнекпен анықталады. Демек, (2.1)-(2.5) кері есебін, сәйкесінше, (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есептеріне алып келдік.

Кері есептер мен локалды емес тура есептердің эквиваленттілігі жөнінде келесі лемма орынды.

Лемма 2.1. *Айталық,* (2.8)-(2.11) *шарттар орындалсын. Демек, (2.1)-*(2.5) *кері есебі (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебіне эквивалентті, яғни $(\boldsymbol{u},p,f)$ функциялары (2.1)-*(2.5) *кері есебінің шешімі болса, онда $(\boldsymbol{u},p)$ жұбы (2.14), (2.3)-*(2.4) *локалды емес тура есебінің шешімі болып табылады және керісінше, $(\boldsymbol{u},p)$ функциялары (2.14), (2.3)-*(2.4) *локалды емес тура есебінің шешімі болса, онда* (2.13) *өрнекпен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (2.1)-*(2.5) *кері есебінің шешімі болып табылады.*

Ескерту 2.2. *(2.14), (2.3)-*(2.4) *локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімінің анықтамасы 2.1 және 2.2-анықтамаға ұқсас түрде беріледі.*

Дәлелдеуі 17. *Шын мәнінде, лемманың дәлелдеуінің бірінші бөлігі (2.1)-(2.2) теңдеулер жүйесінен (2.14) теңдеуді алуда дәлелденді.*

Енді екінші бөлігін дәлелдейік. Айталық, $(\mathbf{u},p)$ *функциялар жұбы (2.14), (2.3)-*(2.4) *локалды емес тура есебінің шешімі болсын. Екінші жағынан,* $(\mathbf{u},p)$ *функциялар жұбы (2.13) өрнегімен анықталған $f(t)$ функциясымен бірге (2.1)-(2.4) өрнектерді қанағаттандырады. Олай болса,* $(\mathbf{u},p,f)$ *функциялары (2.1)-(2.5) кері есебінің шешімі екенін дәлелдеу үшін (2.5) қосымша шарттың орынды екенін көрсету жеткілікті.*

Онда кері жорып, яғни (2.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық. Сондай-ақ,

$$(\mathbf{u}(t),\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \varkappa(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e_1(t),\ t \in [0,T] \tag{2.15}$$

болсын, мұндағы $t \geqslant 0$ үшін $e_1(t) \neq e(t)$. Шешімнің анықтамасы мен (2.10), (2.15) шарттардан $e_1(t) \in W_2^1([0,T])$ орындалады, сонымен қатар (2.11) үйлесімділік шарттарынан төмендегі нәтиже қорытылады

$$e_1(0) = (\mathbf{u}(0),\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} + \varkappa(\nabla\mathbf{u}(0),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} = e(0).$$

Енді (1.14) өрнекке ω функциясын көбейтіп және бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, сонымен бірге (2.15) шартты ескерсек, онда

$$e_1'(t) + \nu\left(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds = \frac{1}{g_0(t)}\cdot$$
$$\left(e'(t) + \nu\left(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} + \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds\right)(\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega})_{2,\Omega} \tag{2.16}$$

теңдігі шығады, сондай-ақ (2.8) шарттан $E(t) = e_1(t) - e(t)$ функциясы үшін келесі Коши есебі алынады

$$\begin{cases} E'(t) = 0, \\ E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

және одан $t \geqslant 0$ үшін $e_1(t) \equiv e(t)$ тұжырымдалады.

Алдағы уақытта 2.1-лемма бойынша (2.1)-(2.5) кері есебінің орнына (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебінің шешімділігі зерттелінеді.

Теорема 2.1. *Айталық, (2.7)-(2.12) шарттар орындалсын. Ақырлы $T_3 \in (0, T]$ уақыты табылып, Q_{T_3} цилиндрінде (2.14), (2.3)-(2.4) тура есебінің кемінде бір әлсіз шешімі бар болады, мұндағы T_3 мәні төменде (2.31) өрнектен табылады. Сонымен қатар, әлсіз шешім келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады*

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T_3;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})} + \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{V})} + \|\mathbf{u}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})} \leqslant C, \tag{2.18}$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Дәлелдеуі 18. *Теореманы дәлелдеу үшін Фаэдо-Галеркин әдісі қолданылады: ең алдымен жуық шешімдер құрылып, оған априрлық бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденеді.*

Галеркиндік жуықтау. *Айталық, $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ функциялары $\mathbf{H}$ кеңістігінің элементтерінен құралған, $\mathbf{L}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортогональ және сызықтық комбинациялары $\mathbf{V}$ кеңістігінде барлық жерде тығыз жүйе болсын. Өлшемі $n-$ге ($n \in \mathbb{N}$) тең және $\boldsymbol{\varphi}_k$, $k = 1, \ldots, n$ жүйесін қамтитын $\mathbf{X}^n$ кеңістігін қарастырайық. Кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін (2.1)-(2.4), (2.13) есептің жуық шешімі келесі түрде ізделінеді*

$$\mathbf{u}^n(x,t) = \sum_{j=1}^n c_j^n(t)\boldsymbol{\varphi}_j(x), \quad \boldsymbol{\varphi}_j \in \mathbf{X}^n, \tag{2.19}$$

мұндағы $c_j^n(t)$, $j = 1, ..., n$ коэффициенттері белгісіз және төмендегі жәй *дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ) жүйесінің шешімі болып табылады*

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left((\mathbf{u}^n(t),\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}+\varkappa\,(\nabla\mathbf{u}^n(t),\nabla\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}\right)+\nu\,(\nabla\mathbf{u}^n(t),\nabla\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}-\\
((\boldsymbol{u}^n(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{u}^n(t))_{2,\Omega}=-\int\limits_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}^n(s),\nabla\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}\,ds+\\
F_5(\mathbf{u}^n,t)\,(\mathbf{g}(\mathbf{x},t),\boldsymbol{\varphi}_k)_{2,\Omega}\,,
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

мұндағы $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *және*

$$
\begin{gathered}
F_5(\mathbf{u}^n,t)=\frac{1}{g_0(t)}\Big(e'(t)+\nu\,(\nabla\mathbf{u}^n(t),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}-\\
((\boldsymbol{u}^n(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u}^n(t))_{2,\Omega}+\int\limits_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}^n(s),\nabla\boldsymbol{\omega})_{2,\Omega}\,ds\Big)\,.
\end{gathered}
\tag{2.21}
$$

Енді (1.21) ЖДТ жүйесін келесі бастапқы шарттармен толықтырайық

$$
\mathbf{u}^n(0)=\mathbf{u}_0^n,\quad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{2.22}
$$

мұндағы

$$
\mathbf{u}_0^n=\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{u}_0,\boldsymbol{\varphi}_j\right)_{2,\Omega}\boldsymbol{\varphi}_j
$$

функциясы $\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V}$ *кеңістігіндегі функционалдық тізбек болып табылады және*

$$
\mathbf{u}_0^n(\mathbf{x})\to\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x})\ \text{әлді жинақты}\ \ \mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V}\text{-де } n\to\infty. \tag{2.23}
$$

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша (2.20)-(2.22) Коши есебінің $[0,t_0]$ *аралығында* $c_j^n(t)$ *шешімі локалды бар болады. Төменде, априорлық бағалаулар арқылы Коши есебінің шешімін* $[0,T_0]\subset[0,T]$ *кеңейтуге болатынын көруге болады, мұндағы* $[0,T_0]-$ *априорлық бағалаулар орынды болатын максималды аралық.*

Сөйлем 2.1. *Айталық, (2.7)-(2.12) шарттар орындалсын. Олай болса, ақырлы* $T_3\in[0,T]$ *уақыты табылып, барлық* $t\in(0,T_3)$ *үшін келесі априорлық бағалауы орынды*

$$
\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T_3;\mathbf{V})}+\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{V})}\leqslant M_0<\infty, \tag{2.24}
$$

мұндағы M_0 *есептің берілгендерінен тәуелді оң тұрақты.*

Дәлелдеуі 19. *(2.20) өрнекті* $c_k^n(t)$ *функциясына көбейтіп,* k *бойынша* $1-$*ден* $n-$*ге шейін қосындылап және* Ω *облыста интегралдағанда*

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n\|^2_{2,\Omega}+\varkappa\,\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}}\right)+\nu\,\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}}=J_1+J_2 \tag{2.25}
$$

теңдігі алынады, мұндағы

$$J_1 := -\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} ds \text{ және } J_2 := F_5(\mathbf{u}^n, t)\left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega}.$$

Гельдер және Юнг теңсіздіктерін қолдану арқылы (2.25) өрнектін оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$\begin{gathered}|F_5(\mathbf{u}^n, t)| \leqslant \frac{1}{k_0}\left[|e'(t)| + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} + \right.\\ \left. C^2(\Omega)\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds\right)^{\frac{1}{2}}\right].\end{gathered} \tag{2.26}$$

$$\begin{gathered}|J_1| \leqslant \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \frac{\nu}{2}\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \frac{K_0^2}{2\nu}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds,\end{gathered} \tag{2.27}$$

$$\begin{gathered}|J_2| \leqslant \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega} |F_5(\mathbf{u}^n, t)| \leqslant \\ \frac{C^3(\Omega)}{k_0}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}^n(t)\|^3_{\mathbf{V}} + \frac{3}{2}\left[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathbf{V}}\left(\nu^2\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \right.\right.\\ \left.\left. K_0^2 \int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds\right)\right] + \frac{1}{2k_0^2}\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega}\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega}.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Алынған (2.27), (2.28) нәтижелерді (2.25) өрнектің оң жағына қойғанда, төмендегі теңсіздік шығады

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}\right) + \nu\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} \leqslant \\ C_1\left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}\right) + \\ C_2\int\limits_0^t \left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}\right) ds + \\ C_3\left(1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}}\right)^{\frac{3}{2}} + 3|e'(t)|^2.\end{gathered} \tag{2.29}$$

мұндағы

$$C_1 := \frac{1}{k_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{g}(t)\|^2_{2,\Omega} + \frac{3\nu^2}{\varkappa}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathbf{V}}; \quad C_2 := \frac{K_0^2}{\varkappa}\left(\frac{1}{\nu} + 3\|\omega\|^2_{\mathbf{V}}\right);$$

$$C_3 := \frac{2C^3(\Omega)}{k_0 \varkappa^{\frac{3}{2}}} \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}\,.$$

Енді

$$y(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2$$

белгілеуін енгізейік. (2.29) *өрнекті* s *бойынша* $0-$*ден* $t-$*ға шейін интегралдағанда*

$$y(t) \leqslant C_5 + C_4 \int_0^t y^{\frac{3}{2}}(s) ds, \tag{2.30}$$

сызықты емес интегралдық теңсіздік шығады және 1-Лемманы ескеріп

$$y(t) \leqslant \frac{C_1}{\left(1 - \frac{1}{2} C_4 C_5^{\frac{1}{2}} t\right)^2} \equiv K_3 < \infty, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T_3 < T_\star := \frac{2}{C_4 C_5^{\frac{1}{2}}} \text{ үшін} \tag{2.31}$$

бағалауы орынды екенін аңғаруға болады. Соңғы өрнек көмегімен келесі априорлық бағалауы алынады

$$\sup_{t\in(0,T_3]} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right) \leqslant K_3, \tag{2.32}$$

мұндағы

$$C_4 := \max\left\{C_3; C_1 + C_2 T\right\}; C_5 := 3\|e'(t)\|_{L^2[0,T]}^2 + 1 + \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2\,.$$

(2.32) бағалауды (2.29) өрнектің оң жағына қолданып және $t \in [0, T_3]$ *бойынша екі жағынан супремум алғанда*

$$\sup_{t\in(0,T_3]} \left(\|\mathbf{u}^n\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2\right) + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{V})}^2 \leqslant M_0 < \infty \tag{2.33}$$

бірінші априорлық бағалауы алынады, мұндағы $M_0 = M_0(\nu, \varkappa, T_3, K_3)$.

Сөйлем 2.2. *2.1-Сөйлемнің барлық шарттары орындалсын. Онда* $t \in (0, T_2]$ *үшін келесі априорлық бағалауы орынды*

$$\sup_{t\in[0,T_3]} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_3})}^2 + \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0,T_3;\mathbf{V})}^2 \leqslant M_1 < \infty, \tag{2.34}$$

мұндағы T_3 *мәні (2.31) өрнектен белгілі, ал* M_1 *есептің берілгендерінен тәуелді оң тұрақты.*

Дәлелдеуі 20. *(2.20) өрнектің екі жағын* $\frac{d\, c_k^n(t)}{d\, t}$ *функциясына көбейтіп,* k *бойынша* $1-$*ден* $n-$*ға шейін қосындылап және* Ω *облыста интегралдап, бөліктеп интегралдау формуласын қолданғанда*

$$\begin{gathered}
\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = F_5(\mathbf{u}^n, t) \left(\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} \\
- \int_0^t K(t-s) \left(\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + \left(\left(\mathbf{u}^n(t) \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_t^n(t), \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega}.
\end{gathered} \tag{2.35}$$

теңдігі алынады. Енді (2.27) *және* (2.28) *өрнектері үшін алынған бағалауларға ұқсас Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін (2.24) бірінші априорлық бағалаумен бірге қолдану арқылы* (2.35) *өрнектің оң жағын бағалайық*

$$\left|-\int_0^t K(t-s)\left(\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds\right| \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{\varkappa}\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{\varkappa}\sup_{t\in(0,T_3]}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 T_3 \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{\varkappa^2}M_0T_3 \tag{2.36}$$

$$\left|F_5(\mathbf{u}^n,t)\left(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega}\right| \leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{k_0^2}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\Big[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\Big(\nu^2\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C^4(\Omega)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + K_0^2\int_0^t\|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds\Big)\Big] \leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{k_0^2}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\Big[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\left(\nu^2 M_0 + C^4(\Omega)M_0^2 + K_0^2 M_0 T_3\right)\Big]. \tag{2.37}$$

$$\left|\left(\left(\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_t^n(t),\mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega}\right| \leqslant \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{4,\Omega}^2 \leqslant C(\Omega)\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant C(\Omega)M_0\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{\varkappa}C^2(\Omega)M_0^2. \tag{2.38}$$

Алынған (2.36)-(2.38) бағалауларды (2.35) өрнекке қойғанда

$$\nu\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant K_4(t), \tag{2.39}$$

бағалауы алынады, мұндағы

$$K_4(t) = \frac{4}{k_0^2}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\left[|e'(t)|^2 + K_5\right] + K_6;$$

$$K_5 = \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\left(\nu^2 M_0 + C^4(\Omega)M_0^2 + K_0^2 M_0 T_3\right);$$

$$K_6 = \frac{2K_0^2}{\varkappa^2}M_0T_2 + \frac{2C^2(\Omega)M_0^3}{\varkappa}.$$

Енді (2.39) *өрнектен s бойынша* $0-$*ден* $t\in[0,T_3]-$*ға шейін интегралдап, сондай-ақ екі жағынан супремум алғанда*

$$\nu\sup_{t\in[0,T_3]}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^{T_3}\left(\|\mathbf{u}_t^n(s)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\|\mathbf{u}_t^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\right)ds \leqslant M_1, \tag{2.40}$$

екінші априорлық бағалау шығады, мұндағы

$$M_1 = K_6 T_3 + \frac{4}{k_0^2} \sup_{t \in [0,T_3]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \left[\|e'(t)\|_{L^2[0,T_3]}^2 + K_5 T_3 \right] < \infty.$$

Ескерту 2.3. *(2.18) априорлық бағалауы негізінде (2.19) жуық шешімі (2.1)-(2.5) кері есебінің 2.1-анықтама мағынасындағы әлсіз шешіміне ұмтылатынын көрсету 2-бөлімдегі секілді аналогты түрде дәлелденеді.*

(2.1)-(2.5) кері есебінің әлді шешімінің бар болуы. (2.14), (2.3)-(2.4) тура есебінің әлді шешімінің бар болуы туралы 1.2-теоремаға аналогты түрде келесі теорема орынды.

Теорема 2.2. *Айталық, 2.1-теореманың шарттары орындалсын және*

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \tag{2.41}$$

болсын. Онда Q_{T_3} цилиндрінде (2.14), (2.3)-(2.4) тура есебінің кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T_3;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 \leqslant M_3 < \infty \tag{2.42}$$

мұндағы M_3 есептің берілгендерінен тәуелді оң тұрақты.

Дәлелдеуі 21. *Жоғарыдағы тұжырымның дәлелдеуі 1.14-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде дәлелденеді. Жалпылама әлді шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есеп үшін*

$$\widetilde{\Delta}\varphi_k := -\mathbb{P}\Delta\varphi_k = \lambda_k\ \varphi_k, \quad \varphi_k(x) \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \tag{2.43}$$

түрінде Стокс операторы үшін қойылған спектралды есептің меншікті функциялары қолданылады, мұндағы $\mathbb{P} : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{H}(\Omega)$ Лере проекциясы. Сондай-ақ, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ жүйесі $\mathbf{H}$ кеңістігінде ортогональ және $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған жүйені құрайды [71], [72].

Олай болса, әлсіз шешім үшін алынған барлық априорлық бағалаулар әлді шешімге де орынды. 2.2-теореманы толық дәлелдеу үшін $\Delta\mathbf{u}^n$ мен $\Delta\mathbf{u}_t^n-$ға априорлық бағалаулар алсақ жеткілікті.

Сөйтіп, (2.20) өрнекті $\lambda_k \frac{d\,c_k^n(t)}{d\,t}-$ға көбейтіп, k бойынша $1-$ден $n-$ге шейін қосындыласақ, онда келесі өрнек шығады

$$\begin{gathered}\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ -\Big(\left(\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n(t), \widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\Big) - \int\limits_0^t K(t-s)\left(\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s), \widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + \\ F_5(\mathbf{u}^n, t)\left(\mathbf{g}, -\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right)_{2,\Omega} \equiv J_5,\end{gathered} \tag{2.44}$$

мұндағы $F(\mathbf{u}^n, t)$ функциясы (2.21) өрнегімен анықталады және төмендегі бағалауды қанағаттандырады

$$|F_5|^2 \leqslant \frac{5}{k_0^2}\left[|e'(t)|^2 + \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2\left(\nu^2\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + C^4(\Omega)\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^4 + K_0^2\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\, ds\right)\right]. \tag{2.45}$$

Гельдер мен Юнг теңсіздіктерін және (2.45) бағалауды бірге қолданып, J_5—ті бағалайық

$$|J_5| \leqslant \frac{\varkappa}{2}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{2\varkappa}\left[C\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + K_0^2\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_5|^2\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\right]. \tag{2.46}$$

(2.46) бағалауды (2.44) теңдікке ескергенде, келесі теңсіздік қорытылады

$$\nu\frac{d}{dt}\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant \frac{3}{\varkappa}\left[C\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + K_0^2\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_5|^2\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\right]. \tag{2.47}$$

Енді (2.47) өрнекті s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_t^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds \leqslant C_8 + C_9\int\limits_0^t \nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds, \tag{2.48}$$

мұндағы

$$C_8 := \nu\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa}\|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}^2\int\limits_0^{T_3}|F_5(s)|^2 ds < \infty,$$

$$C_9 := \frac{3}{\nu\varkappa}\left(C(\Omega)\sup_{t\in[0,T_3]}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0^2 T\right) < \infty.$$

Мұнан кейін, (2.48) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

$$\left\|\widetilde{\Delta}\mathbf{u}^n(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \frac{1}{\nu}C_8 e^{C_9 T_3}, \quad \forall t \in (0, T_3) \tag{2.49}$$

бағалауы қорытылады. Егер (2.48) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T_1]$ бойынша супремум алып және (2.49) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t\in[0,T_3]} \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \widetilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_{T_3})}^2 \leqslant C := C(\nu, \varkappa, C_8, C_9, T_3) < \infty. \qquad (2.50)$$

Теорема 2.3. *Айталық, 2.1-теореманың шарттары орындалсын. (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебінің бірдей белгілілері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз және әлді шешімдері болсын. Онда барлық $(x, t) \in Q_{T^*}$ үшін (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебінің әлсіз және әлді шешімдері жалғыз, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұндағы T^*- әлсіз және әлді шешімдердің бар болуының максималды уақыты.*

Қорыта келе, әлсіз шешімнің бар болуы туралы 2.1-теореманы, әлді шешімнің бар болуы туралы 2.2-теореманы және шешімнің жалғыздығы туралы 2.3-теореманы ескере отырып (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебінің (2.1)-(2.5) кері есебіне эквиваленттілігі туралы 2.1-леммаға сүйеніп бастапқы қойылған кері есеп үшін келесі нәтижелер тұжырымдалады.

Теорема 2.4. *Айталық, (2.7)-(2.12) шарттар орындалсын. Ақырлы $T_3 \in (0, T]$ уақыты табылып, Q_{T_3} цилиндрінде (2.1)-(2.5) кері есебінің кемінде бір әлсіз шешімі бар болады және ол келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T_3;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{L}^2(\Omega)\cap\mathbf{V})}^2 + \|f\|_{L^2[0,T_3]}^2 \leqslant C, \qquad (2.51)$$

мұндағы T_3 мәні (2.31) өрнектен анықталады және C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Теорема 2.5. *Айталық, 2.4-теореманың шарттары және (2.41) шарт орындалсын. Онда Q_{T_3} цилиндрінде (2.1)-(2.5) кері есебінің кемінде бір әлді шешімі бар болады және ол келесі априорлық бағалауды қанағаттандырады*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T_3;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0,T_3;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega))}^2 + \|f\|_{L^2[0,T_3]}^2 \leqslant C < \infty \qquad (2.52)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді оң тұрақты.

Теорема 2.6. *Айталық, 2.4-теореманың шарттары орындалсын. (2.1)-(2.5) кері есебінің бірдей белгілілері үшін $\mathbf{u}_1$ мен $\mathbf{u}_2$ әлсіз және әлді шешімдері болсын. Онда барлық $(x, t) \in Q_{T^*}$ үшін (2.1)-(2.5) кері есебінің әлсіз және әлді шешімдері жалғыз, яғни $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$, мұндағы T^*- әлсіз және әлді шешімдердің бар болуының максималды уақыты.*

2.1. Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есептің глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы

Бұл тармақта (2.1)-(2.5) кері есебінің дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесінде конвективті мүшесі болмағанда глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді. Сондай-ақ, (2.18) өрнектегі априорлық бағалаудың уақыт бойынша глобалды екенін дәлелдеудің негізгі қиындығы $F(\mathbf{u}, t)$ функциясының (2.13) өрнектер бойынша анықтамасында $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u}$ сызықты емес конвективті мүшенің отыруы. Жоғарыда қарастырылған отырған кері есептің сызықты жағдайда глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы [73,74] жұмыстарда зерттелінді. Алайда, қарастырылып отырған кері есептердің глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы есептің берілгендеріне шектеу қою арқылы тұжырымдалады. Демек, сызықты Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, s)ds - \nabla p = f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \tag{2.53}$$

$$\mathbf{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \tag{2.54}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.55}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \tag{2.56}$$

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{u}\omega + \varkappa\nabla\mathbf{u}\nabla\omega)\mathbf{dx} = e(t),\ t \in [0, T], \tag{2.57}$$

Айталық, (2.8)-(2.11) шарттар орынды болсын. Сөйтіп, қарастырылып отырған (2.53)-(2.57) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есеп келесі түрде болады, яғни (2.55) бастапқы және (2.56) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds + \nabla p = \\ F_6(\mathbf{u}, t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \ \ \mathbf{div}\, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \ \ (\mathbf{x}, t) \in Q_T,\end{gathered} \tag{2.58}$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_6(\mathbf{u}, t)$ функционалы

$$\begin{gathered}F_6(\mathbf{u}, t) := \frac{1}{g_0(t)}\left(e'(t) + \right. \\ \left. \nu\left(\nabla\mathbf{u}(t), \nabla\omega\right)_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s), \nabla\omega\right)_{2,\Omega} ds\right)\end{gathered} \tag{2.59}$$

өрнекпен анықталады.

Лемма 2.2. *Айталық, (2.8)-(2.11) шарттар орындалсын. Онда (2.53)-(2.57) кері есебі (2.58), (2.55), (2.56) тура есебіне эквивалентті.*

Дәлелдеуі 22. *Бұл лемма аналогты түрде 2.1-лемма секілді дәлелденеді.*

Теорема 2.7. *Айталық, (2.7)-(2.12) шарттар орындалсын. Онда Q_T цилиндрінде (2.58), (2.55), (2.56) тура есебінің $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ әлсіз шешімі бар болады әрі жалғыз, соньмен бірге 2.2 бойынша эквивалентті (2.53)-(2.57) кері есебі әлсіз шешімі бар болады әрі жалғыз және ол барлық $t \in (0,T]$ үшін (2.51) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 23. *Соңғы тұжырым аналогты түрде (2.1)-(2.5) кері есебінің шешімділігі секілді (2.53)-(2.57) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (2.58), (2.55), (2.56) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0,T]$ үшін (2.18) бағалауды немесе (2.24), (2.34) априорлық бағалауларды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 2.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі.*

Демек, (2.25) және (2.35) өрнектеріне аналогты энергетикалық теңдіктер келесі түрде болады

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\,\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}}\right) + \nu\,\|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} = \\ -\int\limits_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega}\,ds + F_6(\mathbf{u}^n,t)\,(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} \equiv J_3 \tag{2.60}$$

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\,\|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} = F_6\,(\mathbf{g}(t),\mathbf{u}^n_t(t))_{2,\Omega} \\ -\int\limits_0^t K(t-s)\,(\nabla\mathbf{u}^n(s), \nabla\mathbf{u}^n_t(t))_{2,\Omega}\,ds \equiv J_4, \tag{2.61}$$

мұндағы $F_6(\mathbf{u}^n,t)$ функционалы (2.59) өрнекпен анықталған және

$$|F_6(\mathbf{u}^n,t)| \leqslant \frac{1}{k_0}\left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\,(\nu\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} + \right. \\ \left. K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]. \tag{2.62}$$

Ал (2.60) теңдіктің оң жағын (2.62) өрнекті ескеріп бағаласақ, онда

$$|J_3| \leqslant \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega} |F_6(t)| \leqslant$$

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\nu} \int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds + \frac{3}{2} \Big[|e'(t)|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \Big(\nu^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \qquad (2.63)$$

$$+ K_0^2 \int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \Big) \Big] + \frac{1}{2k_0^2} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 ,$$

теңдіздігі шығады. Мұнан соң, (2.63) теңсіздігін (2.60) теңдіктің оң жағына қойсақ, онда

$$y(t) := \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2$$

функциясы үшін

$$y'(t) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant C_1 \int\limits_0^t y(s) ds + C_2 y(t) + C_3(t) \qquad (2.64)$$

теңсіздігі қорытылады, мұндағы

$$C_1 := \frac{K_0^2}{\varkappa} \left(\frac{1}{\nu} + 3 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 \right);$$

$$C_2 := \frac{1}{\varkappa} \left(3\nu^2 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{C^2}{k_0^2} \sup_{t \in [0,T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \right); \quad C_3(t) := 3 |e'(t)|^2$$

Осылайша (2.64) өрнекті s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдасақ, онда

$$y(t) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant C_4 \int\limits_0^t y(s) ds + C_5 \qquad (2.65)$$

интегралдық теңсіздігі алынады, мұндағы

$$C_4 := C_1 T + C_2; \; C_5 := 3 \int\limits_0^T C_3(s) ds + \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 .$$

Сөйтіп, (2.65) өрнекке сызықты Гронуолл теңсіздігін қолдансақ, онда

$$y(t) \leqslant C_5 e^{C_4 T} \qquad (2.66)$$

бағалауы шығады.

Алынған (2.66) бағалауды (2.65) өрнектің оң жағына қолданып, екі жағынан $t \in [0,T]$ бойынша супремум алсақ, онда келесі априорлық бағалау алынады

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2+\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2\right)+\|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leqslant M_1<\infty, \tag{2.67}$$

мұндағы $M := M(\nu,\varkappa,T,C_4,C_5)$.

Демек, (2.24) априрлық бағалау тұжырымдалды. Мұнан кейін екінші априорлық бағалаудың орынды екенін дәлелдеу үшін ең алдымен, (2.61) теңдіктің оң жағын (2.62) өрнекті ескеріп бағаласақ, онда

$$\begin{gathered}
|J_4| \leqslant \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}} K_0\left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} + \\
\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}|F_6(t)| \leqslant \frac{\varkappa}{4}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2+ \\
\frac{K_0^2}{\varkappa}\int_0^t\|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds+\frac{3C^2(\Omega)}{\varkappa k_0^2}\|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2\Big[|e'(t)|^2+ \\
\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2\left(\nu^2\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2+K_0^2\int_0^t\|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds\right)\Big]+\frac{\varkappa}{4}\|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2,
\end{gathered} \tag{2.68}$$

Мұнан соң, (2.68) теңсіздігін (2.61) теңдіктің оң жағына қойып, сонымен қатар, s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап, $t\in[0,T]$ бойынша супремум алып және (2.67) априорлық бағалауды ескерсек, онда

$$\nu\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2+\int_0^T\left(\|\mathbf{u}_s^n(s)\|_{2,\Omega}^2+\varkappa\|\mathbf{u}_s^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\right)ds\leqslant M_2, \tag{2.69}$$

екінші априорлық бағалауы тұжырымдалады, мұндағы

$$M_2 := M_1\left(\frac{K_0^2T}{\varkappa}+\nu^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{V}}^2+K_0^2\right)+\frac{3C^2(\Omega)}{\varkappa k_0^2}\|e'(t)\|_{L^2[0,T]}^2.$$

Осылайша теореманың дәлелдеуі аяқталды.

Теорема 2.8. *Айталық, 2.7-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (2.41) шарт орынды болсын. Онда (2.58), (2.55), (2.56) тура есебінің жалғыз әлді шешімі табылады, сәйкесінше, эквивалентті (2.53)-(2.57) кері есебінің де жалғыз әлді шешімі бар болады және ол барлық $t\in(0,T]$ үшін (2.52) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 24. *Соңғы тұжырымның дәлелдеуі 2.2-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде жүргізіледі.*

2.2. Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есептің глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы

Бұл тармақта (2.1)-(2.5) кері есебінің дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесінің оң жағы арнайы түрде, яғни $\mathbf{g}(\mathbf{x},t) := \omega(\mathbf{x})$ болғанда уақыт бойынша глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы зерттелінеді. Демек, оң жағы $\mathbf{g}(\mathbf{x},t) := \omega(\mathbf{x})$ функциясына тең сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},s)ds - \nabla p = \\ f(t)\left(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) - \varkappa\Delta\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\right),\end{gathered} \tag{2.70}$$

$$\mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t) \in Q_T, \tag{2.71}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2.72}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t) \in \Gamma_T, \tag{2.73}$$

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{u}\boldsymbol{\omega} + \varkappa\nabla\mathbf{u}\nabla\boldsymbol{\omega})d\mathbf{x} = e(t),\ t \in [0,T]. \tag{2.74}$$

Айталық, (2.9), (2.10) және

$$\boldsymbol{\omega} \neq 0, \quad \forall\mathbf{x} \in \Omega\ (\text{немесе}\ \ \|\boldsymbol{\omega}|^2_{2,\Omega} + \varkappa\,\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathbf{V}}). \tag{2.75}$$

шарттар орынды болсын.

Демек, қарастырылып отырған (2.70)-(2.74) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есеп келесі түрде болады, яғни (2.72) бастапқы және (2.73) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_t - \varkappa\Delta\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \int_0^t K(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds + \nabla p = \\ F_7(\mathbf{u},t)\left(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) - \varkappa\Delta\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\right),\ \ \mathbf{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \ \ (\mathbf{x},t) \in Q_T,\end{gathered} \tag{2.76}$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_7(\mathbf{u},t)$ функционалы

$$\begin{gathered}F_7(\mathbf{u},t) := \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_0}\Big(e'(t) + \nu\left(\nabla\mathbf{u}(t),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} - \\ \left(\left(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega},\mathbf{u}(t)\right)_{2,\Omega} - \int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla\mathbf{u}(s),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_{2,\Omega} ds\Big)\end{gathered} \tag{2.77}$$

өрнегімен анықталады және $\boldsymbol{\omega}_0 = \|\boldsymbol{\omega}\|^2_{2,\Omega} + \varkappa\,\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathbf{V}} > 0$ тұрақты.

Лемма 2.3. *Айталық, (2.8)-(2.11) шарттар орындалсын. Онда (2.70)-(2.74) кері есебі (2.76), (2.72), (2.73) тура есебіне эквивалентті.*

Дәлелдеуі 25. *Бұл лемма аналогты түрде 2.1-лемма секілді дәлелденеді.*

Енді (2.76), (2.72), (2.73) тура есебінің әлсіз шешімінің бар болуы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 2.9. *Айталық, (2.7), (2.11)-(2.12) және (2.75) шарттар орындалсын. Онда (2.76), (2.72), (2.73) локалды емес тура есебінің Q_T цилиндрінде кемінде бір әлсіз шешімі табылады, сәйкесінше, эквивалентті 2.70)-(2.74) кері есебінің де кемінде бір әлсіз шешімі табылады және барлық $t \in (0, T]$ үшін (2.51) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 26. *Жоғарыдағы тұжырым аналогты түрде (2.1)-(2.5) кері есебінің шешімділігі секілді (2.70)-(2.74) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (2.76), (2.72), (2.73) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0, T]$ үшін (2.18) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 2.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі.*

Демек, (2.25) және (2.35) өрнектеріне аналогты энергетикалық теңдіктер келесі түрде болады

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}^n\|^2_{2,\Omega} + \varkappa \|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}}\right) + \nu \|\mathbf{u}^n\|^2_{\mathbf{V}} = \\ &-\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} ds + F_7(\mathbf{u}^n, t)e(t) \equiv J_5\end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{2,\Omega} + \varkappa \|\mathbf{u}^n_t(t)\|^2_{\mathbf{V}} = F_7(\mathbf{u}^n, t)e'(t) - \\ &\int\limits_0^t K(t-s)\left(\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n_t(t)\right)_{2,\Omega} ds + \left((\mathbf{u}^n(t)\cdot\nabla)\,\mathbf{u}^n_t(t), \mathbf{u}^n(t)\right)_{2,\Omega} \equiv J_6,\end{aligned} \tag{2.79}$$

теңдігі алынады, мұндағы $F_7(\mathbf{u}^n, t)$ функционалы (2.77) өрнекпен анықталған және

$$\begin{aligned}&|F_7(\mathbf{u}^n, t)| \leqslant \frac{1}{k_0}\left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\left(\nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} + \right.\right. \\ &\left.\left. C^2(\Omega)\|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|^2_{\mathbf{V}} ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.80}$$

бағалауын қанағаттандырады.

Ең алдымен (2.79) теңдіктің оң жағындағы екінші қосылғышты (2.80) өрнекті пайдаланып бағаласақ, онда

$$
\begin{aligned}
&|F_7(\mathbf{u}^n,t)e(t)| \leqslant \frac{|e(t)|}{\omega_0}\Bigg[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}}\Bigg(\nu\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} + C^2\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
&K_0\left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg)\Bigg] \leqslant \frac{1}{2\omega_0}\left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2\right) + \frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
&\frac{\nu^2\,|e(t)|^2}{2\omega_0^2}\,\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{C^2}{\omega_0}\,|e(t)|\,|e'(t)|\,\|\omega\|_{\mathbf{V}}\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
&\frac{K_0^2}{2\omega_0^2}\,|e(t)|^2\,\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

теңсіздігі тұжырымдалады. Ал бірінші қосылғыш үшін (2.27) бағалауды қолданып және (2.81) теңсіздікпен бірге (2.78) оң жағына ескерсек, онда

$$
y(t) := \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\,\|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2
$$

функциясы үшін келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$
y'(t) + \nu\,\|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant C_1\int\limits_0^t y(s)ds + C_2 y(t) + C_3(t) \tag{2.82}
$$

мұндағы

$$
C_1 := \frac{1}{\varkappa};\;\; C_2 := \frac{2C^2}{\omega_0\varkappa}\sup_{t\in[0,T]}|e(t)|\sup_{t\in[0,T]}|e'(t)|\,\|\omega\|_{\mathbf{V}} + 1;
$$

$$
C_3(t) := \frac{1}{\omega_0}\left(|e(t)|^2 + |e'(t)|^2\right) + \frac{\nu^2\,|e(t)|^2}{\omega_0^2}\,\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{\omega_0^2}\,|e(t)|^2\,\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2
$$

Енді (2.82) өрнекті s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап, (1.24) өрнекті ескерсек, онда

$$
y(t) + \nu\,\|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leqslant C_4\int\limits_0^t y(s)ds + C_5 \tag{2.83}
$$

интегралдық теңсіздік қорытылады, мұндағы

$$
C_4 := C_1T + C_2; C_5 := \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa\,\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \int\limits_0^t C_3(s)ds.
$$

Сөйтіп, (2.83) өрнекке сызықты Гронуолл теңсіздігін қолдансақ, онда

$$y(t) \leqslant C_5 e^{C_4 T} \tag{2.84}$$

бағалауы шығады.

Алынған (2.84) бағалауды (2.83) өрнектің оң жағына қолданып, екі жағынан $t \in [0, T]$ бойынша супремум алсақ, онда келесі априорлық бағалау алынады

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})}^2 \leqslant M_2 < \infty, \tag{2.85}$$

мұндағы $M_2 := M_2(\nu, \varkappa, T, C_4, C_5)$.

Енді (2.79) теңдіктің оң жағындағы бірінші қосылғышты (2.80) және (2.85) өрнектерді бірге пайдаланып бағаласақ, онда

$$\begin{gathered}
|F_7(\mathbf{u}^n, t)e'(t)| \leqslant \frac{|e'(t)|}{\omega_0} \left[|e'(t)| + \|\omega\|_{\mathbf{V}} \left(\nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}} + \right.\right. \\
\left.\left. C^2 \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + K_0 \left(\int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \leqslant \\
\frac{1}{\omega_0} |e'(t)|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{\nu^2 |e'(t)|^2}{2\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
\frac{C^2}{2\omega_0} |e'(t)| \, \|\omega\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2} |e'(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
\frac{1}{2} \int\limits_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 \, ds \leqslant \frac{1}{\omega_0} |e'(t)|^2 + M_2 + \frac{\nu^2 |e'(t)|^2}{2\omega_0^2} \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 + \\
\frac{C^2}{2\omega_0} |e'(t)| \, \|\omega\|_{\mathbf{V}} M_2 + \frac{K_0^2}{2\omega_0^2} |e'(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 ,
\end{gathered} \tag{2.86}$$

теңсіздіктер қорытылады. Сондай-ақ, екінші және үшінші қосылғыштарға, сәйкесінше, (2.36) және (2.38) өрнектерді негізге ала отырып бағалап, (2.79) теңдіктің оң жағына (2.86) өрнекпен бірге қойғанда

$$\nu \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leqslant C_6(t), \tag{2.87}$$

$$C_6(t) := \frac{2}{\omega_0} |e'(t)|^2 + 2M_2 + \frac{\|\omega\|_{\mathbf{V}}^2}{\omega_0} \left(\nu^2 |e'(t)|^2 + C^2 |e'(t)| M_2 + K_0^2 |e'(t)|^2 \right)$$
$$+ \frac{2K_0^2}{\varkappa^2} M_2 T + \frac{2}{\varkappa} C^2(\Omega) M_2^2$$

Сөйтіп, (2.87) өрнекті s бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап және $t \in [0,T]$ бойынша супремум алсақ, онда

$$\nu \sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{u}^n(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \varkappa \|\mathbf{u}^n_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \leqslant C_7, \tag{2.88}$$

екінші априорлық бағалауы қорытылады, мұндағы

$$C_7 := \int\limits_0^T C_(s)ds + \|\mathbf{u}_0\|^2_{\mathbf{V}}.$$

Демек, 2.9- теорема дәлелденді.

Теорема 2.10. *Айталық, 2.9-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (2.41) шарт орынды болсын. Онда (2.76), (2.72), (2.73) тура есебінің әлді шешімі бар болады, сәйкесінше, эквивалентті 2.70)-(2.74) кері есебінің әлді шешімі бар болады және ол барлық $t \in (0,T]$ үшін (2.52) бағалауды қанағаттандырады.*

Дәлелдеуі 27. *Соңғы тұжырымның дәлелдеуі 2.2-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде жүргізіледі.*

3 P-ЛАПЛАСИАНДЫ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕРІ ЕСЕП

Бұл бөлімде p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін қойылған кері есебінің уақыт бойынша локалды және глобалды әлсіз шешімінің бар болуы және жалғыздығы зерттелінеді.

3.1. Есептің қойылымы

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс және $\partial\Omega$ оның жатық шекарасы болсын. Ал $Q_T = \{(x,t): \ x \in \Omega, \ 0 < t \leqslant T\}$ цилиндрі $\Gamma_T = \{(x,t): \ x \in \partial\Omega, \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ бүйір бетімен анықталсын.

Бұл бөлімде $u(x,t)$ және $f(t)$ функцияларын табуға арналған

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = \gamma \, |u|^{\sigma-2} u + f(t)g(x,t), \ (x,t) \in Q_T \tag{3.1}$$

p-Лапласианды және оң жағы сызықты емес мүшеден тәуелді псевдопараболалық теңдеуді,

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in \Omega \tag{3.2}$$

бастапқы шартты,

$$u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Gamma_T \tag{3.3}$$

Дирихле шартын және

$$\int\limits_{\Omega} (u\omega + \nabla u \nabla \omega) \, dx = e(t), \ \ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.4}$$

қосымша интегралдық шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық. Мұндағы γ коэффициенті оң ($\gamma > 0$) немесе теріс ($\gamma < 0$) бола алатын тұрақты. Сондай-ақ, $g(x,t), u_0(x), \omega(x)$ және $e(t)$ белгілі функциялар, ал p және σ коэффициенттері оң тұрақтылар және келесі шартты қанағаттандырады

$$1 < p, \ \sigma < \infty. \tag{3.5}$$

Аталмыш (3.1) типті теңдеулер псевдопараболалық немесе Соболев типті теңдеулер деп аталады және математика мен физиканың көптеген салаларында кездеседі [75], [76]. Мысалы, олар термодинамикалық процестерді [77], жарылған тау жыныстарындағы сұйықтық ағынын [78], кеуекті ортадағы фильтрацияны [79], стационарлы емес екінші ретті сұйықтық ағынын [80], ньютондық емес сұйықтықтардың қозғалысын [76], [3], атап айтқанда, Кельвин-Фойгт сұйықтарын және жоғарыда келтірілген көптеген анықтамаларды [40, 41] модельдеуде пайдаланылды. Кері есептерде белгісіз коэффициенттің болуына байланысты бастапқы және шекаралық шарттармен бірге қосымша шарт та берілді [75], [81], [82], [5]. Бұл жұмыста қосымша шарт ретінде (3.4) интегралдық қайта анықтау шарты ұсынылған, оны физикалық түрде бүкіл Ω ауданындағы берілген ағынның орташа жылдамдығы ретінде түсінуге болады.

Егер $p = 2$ және $\sigma = 2$ болса, онда (3.1) теңдеу классикалық псевдопараболалық теңдеуді береді. Біздің білуімізше, псевдопараболалық теңдеулер үшін кері есептер көп зерттелмеген, классикалық псевдопараболалық теңдеулер үшін [83], [75], [53], [84], [85], [86], [87, 88] және p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеулер мен оған қатысты теңдеулер үшін [89], [51], [55], [65, 66], [90] кері есептерді осы мақалалардан және ондағы сілтемелерден көруге болады.

Аталмыш (3.1)-(3.4) кері есебі бұл жұмыстан тәуелсіз параллель түрде оң жағы $F(x,t) = f(t)\cdot(\omega(x) - \Delta\omega(x))$ арнайы түрдегі Антонцев және онымен соавторлардың [89] жұмысында қарастырылды, мұндағы $\omega(x) - \Delta\omega(x)$ функциясы (3.4) қайта анықтау шартында сынақ функциясы ретінде пайдаланылады. Бұл математикалық және физикалық тұрғыдан есептің тұжырымдалуын шектеуі мүмкін. [89] жұмыста уақыт бойынша локалды әлсіз шешімнің бар болуы p, σ көрсеткіштері мен d өлшемінің келесі

$$\sigma > p,\ 2 < p < 4,\ 2 < \sigma < \frac{2d}{d-2} \text{ және } d \geqslant 3$$

мәндерінде дәлелденді.

Сөйтіп, ұсынылған жұмыста (3.1)-(3.4) кері есебінің оң жағы $F(x,t) = f(t)g(x,t)$ түрінде $g(x,t)$ еркін функциясы болғанда p, σ көрсеткіштері және d өлшемінің барлық мүмкін жағдайларында бірмәнді шешімділігі зерттелінді. Сондай-ақ әлсіз шешімнің жалғыздығын $\gamma > 0$ және $\gamma < 0$ болған жағдайда да дәлелдедік.

3.1.-бөлімде (3.1)-(3.4) кері есебінің (3.11)-(3.14) локалды емес тура есепке эквиваленттілігі дәлелденеді. 3.2.-бөлімде әлсіз шешімінің уақыт бойынша глобалды және локалды бар болуы $\gamma > 0$ жағдайда, ал 3.3.-бөлімде $\gamma \leqslant 0$ жағдайда тұжырымдалады. Ол үшін u^n галеркиндік жуықтаулары құрылып және оларға бірінші және екінші априорлық бағалаулар алынады. Сондай-ақ, $*-$әлсіз, әлсіз және әлді жинақтылықтарды монотондылық әдісімен бірге қолданып, $n \to \infty$ бойынша шекке көшу дәлелденеді. 3.4.-бөлімде $\gamma > 0$ және $\gamma \leqslant 0$ жағдайда (3.11)-(3.14) есептің әлсіз шешімінің жалғыздығы тұжырымдалады.

Әлсіз қойылым. Есептің берілгендері төмендегі шарттарды қанағаттандырсын

$$u_0(x) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\sigma}(\Omega); \tag{3.6}$$

$$|g_0(t)| := \left| \int\limits_{\Omega} g(x,t)\omega(x)dx \right| \geqslant l_0 > 0 \text{ барлық } t \geqslant 0 \text{ үшін }; \tag{3.7}$$

$$g(x,t) \in L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega)); \tag{3.8}$$

$$e(t) \in W^{1,2}([0,T]) \quad \text{және} \quad \int\limits_{\Omega} (u_0(x)\omega(x) + \nabla u_0(x)\nabla\omega(x))\, dx = e(0); \tag{3.9}$$

$$\omega(x) \in W^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{\sigma}(\Omega). \tag{3.10}$$

Лемма 3.1. *Айталық, (3.7), (3.9)-(3.10) шарттар орындалсын. Онда (3.1)-(3.4) кері есебі төмендегі сызықты емес псевдопараболалық теңдеу үшін локалды емес тура есепке эквивалентті*

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \gamma\,|u|^{\sigma-2}u + f(t,u)g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.11}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in \Omega, \tag{3.12}$$

$$u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{3.13}$$

мұндағы

$$f(t,u) = \frac{1}{g_0(t)}\left(e'(t) + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\omega\; dx - \gamma\int\limits_{\Omega} |u|^{\sigma-2}u\omega dx\right). \tag{3.14}$$

Дәлелдеуі 28. *1. Айталық, $(u(x,t), f(t))$ фукнциялар жұбы (3.1)-(3.4) кері есебінің шешімі болсын. Демек, (3.1) теңдеуді ω функциясына көбейтіп, Ω облыста интегралдап және бөліктеп интегралдау өрнегін ескерсек, онда*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} (u_t\omega + \nabla u_t\nabla\omega)\, dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\omega\; dx = \\ \gamma\int\limits_{\Omega} |u|^{\sigma-2}u\omega dx + f(t)\int\limits_{\Omega} g(x,t)\omega dx.\end{gathered} \tag{3.15}$$

теңдігі алынады. Төмендегі теңдікті

$$\int\limits_{\Omega} (u_t\omega + \nabla u_t\nabla\omega)\, dx = e'(t),$$

(3.4) қосымша шартты және (3.7) ұйғарымды қолданып, (3.15) теңдеуден (3.14) өрнек қорытылады.

2. Енді $u(x,t)$ функциясы (3.14) өрнекпен бірге (3.11)-(3.13) тура есебінің шешімі болсын, яғни (u,f) функциялар жұбы (3.1)-(3.3) есептің шешімі болып табылады. Демек, осы (u,f) жұбы (3.1)-(3.4) кері есебінің шешімі болатындығын дәлелдеу үшін $u(x,t)$ функциясы (3.4) қосымша шартты қанағаттандыратынын көрсету жеткілікті. Олай болса, кері жорып, (3.4) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық және

$$\int\limits_{\Omega} (u\omega + \nabla u\nabla\omega)\, dx = e_1(t), \;\; t \geqslant 0, \tag{3.16}$$

болсын, мұндағы барлық $t \geqslant 0$ үшін $e_1(t) \neq e(t)$. Сондай-ақ, (3.4) және (3.9) шарттарға сәйкес $e_1(t) \in W_2^1([0,T])$ және келесі теңдік орынды

$$e_1(0) = \int\limits_{\Omega} (u_0\omega + \nabla u_0 \nabla \omega)\, dx = e(0).$$

(3.11) өрнекті ω функциясына көбейтіп және бөліктеп интегралдап, (3.14) шартты қолдансақ, онда

$$e_1'(t) + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla \omega\ dx - \gamma \int\limits_{\Omega} |u|^{\sigma-2} u \cdot \omega dx = f(t,u) g_0(t) \tag{3.17}$$

теңдігі тұжырымдалалды, мұндағы $f(t,u)$ мәні (3.14) өрнекпен берілген. (3.14) өрнекті (3.17) теңдікке қойғанда, келесі теңдік шығады

$$\begin{gathered} e_1'(t) + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla \omega dx - \gamma \int\limits_{\Omega} |u|^{\sigma-2} u \cdot \omega dx = \\ e'(t) + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla \omega dx - \gamma \int\limits_{\Omega} |u|^{\sigma-2} u \cdot \omega dx. \end{gathered} \tag{3.18}$$

(3.18) теңдіктен $E(t) = e_1(t) - e(t)$ функциясы үшін төмендегі Коши есебі тұжырымдалады

$$E'(t) = 0, \quad E(0) = e_1(0) - e(0) = 0, \tag{3.19}$$

Соңғы Коши есебінен барлық $t > 0$ үшін $e_1(t) \equiv e(t)$ тұжырымы қорытылады.

Анықтама 3.1. *(3.11)-(3.14) есебінің әлсіз шешімі деп*

1. $u \in L^\infty(0,T; W_0^{1,2}(\Omega) \cap W_p^1(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\sigma(Q_T)$, $u_t \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega))$,
2. *Ω-да барлық дерлік жерде $u(0) = u_0$ бастапқы шартты,*
3. *Кез келген $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W_p^1(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)$ және барлық дерлік $t \in [0,T]$ үшін төмендегі теңдікті*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} (u\varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi)\, dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \\ \int\limits_{\Omega} \left(\gamma |u|^{\sigma-2} u + f(t,u) g\right) \varphi dx \end{gathered} \tag{3.20}$$

қанағаттандыратын $u(x,t)$ функциясын атайды.

3.2. Сызықты емес жылу көзімен берілген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есептің әлсіз шешімнің бар болуы мен жалғыздығы

Бұл бөлімде (3.11)-(3.14) есептің шешімділігін зерттеуде ең алдымен σ көрсеткіші және γ коэффициенті, сәйкесінше, $1 < \sigma < \infty$ және

$$\gamma > 0 \tag{3.21}$$

жағдайы қарастырылады. Аталмыш ұйғарымдарға байланысты (3.11)-(3.14) тура есебінің шешілімділігі туралы келесі теорема орынды.

Теорема 3.1. *[Глобалды бар болуы] Айталық, (3.6)-(3.10), (3.21) шарттар орындалсын, сондай-ақ, σ, p көрсеткіштері келесі шартты қанағаттандырсын*

$$1 < \sigma,\ p \leqslant 2. \tag{3.22}$$

Онда (3.11)-(3.14) тура есебінің 3.1-анықтама мағынасында глобалды әлсіз шешімі бар болады. Сонымен қатар, әлсіз шешім үшін

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|u(t)\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u(t)\|^2_{2,\Omega}\right) + \|\nabla u\|^p_{p,Q_T} + \|u\|^\sigma_{\sigma,Q_T} \leqslant C_1, \tag{3.23}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|\nabla u(t)\|^p_{p,\Omega} + \|u(t)\|^\sigma_{\sigma,\Omega}\right) + \|u_t\|^2_{2,Q_T} + \|\nabla u_t\|^2_{2,Q_T} \leqslant C_2, \tag{3.24}$$

априорлық бағалаулары орынды, мұндағы C_1 және C_2 есептің берілгендерінен тәуелді тұрақтылар.

Теорема 3.2. *[Локалды бар болуы]. Айталық, (3.6)-(3.10), (3.21) шарттар орындалсын, сондай-ақ, σ, p көрсеткіштері*

$$\sigma \leqslant 2^*,\ \ 2^* = \frac{2d}{d-2}\ \text{егер}\ d > 2; \quad 2^* \in (1,\infty)\ \text{егер}\ d = 2 \tag{3.25}$$

шарттарын келесі ұйғарыммен

$$2 < \sigma \quad \text{немесе} \quad 2 < p. \tag{3.26}$$

бірге қанағаттандырсын. Онда (3.63) өрнекпен анықталған ақырлы $T_* \in (0,T)$ уақыты табылап, (3.11)-(3.14) тура есебінің 3.1-анықтама мағынасында $t \in (0, T_*]$ аралығында кемінде бір локалды әлсіз шешімі бар болады. Сонымен қатар, әлсіз шешім барлық $t \in (0, T_*]$ үшін (3.23)-(3.24) априорлық бағалауды қанағаттандырады.

Ескерту 3.1. *Ескерер жәйт, (3.25) шарт $n \to \infty$, шекке көшкенде қажетті, төменде (3.76) өрнекті қараңыз. 3.1-теоремада $p, \sigma \leqslant 2$ ұйғарымнан соң, соңғы теоремадағы (3.26) шартта σ, p көрсеткіштерінің екіден үлкен кезі қарастырылады.*

Дәлелдеуі 29. *Теореманы дәлелдеу үшін Фаэдо-Галеркин әдісі қолданылады: ең алдымен жуық шешімдер құрылып, оған априрлық бағалаулар алынады, одан кейін шекке көшу дәлелденеді.*

Галеркин жуықтаулары *Айталық, $\{\psi_k\}_{k\in N}$ жүйесі $L^2(\Omega)$ кеңітігінде ортогональ және оның сызықтық комбинациясы $V := W_0^{1,2}(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)\cap L^\sigma(\Omega)$ кеңістігінде тығыз болып табылады. Берілген $n\in N$ үшін $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n$ жүйесінің сызықты қабықшасы n-өлшемді V^n векторлық кеңістік болсын. Әрбір $n\in N$ үшін келесі жуық шешімдерді құрайық*

$$u^n(x,t)=\sum_{j=1}^{n}c_j^n(t)\psi_j(x),\quad \psi_j\in V^n, \tag{3.27}$$

мұндағы $c_1^n(t),\ldots,c_n^n(t)$ белгісіз коэффициенттері төмендегі n жәй дифференциалдық теңдеулерден (ЖДТ) анықталады

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega (u_t^n\psi_k+\nabla u_t^n\nabla\psi_k)\,dx+\int\limits_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\cdot\nabla\psi_k\,dx+\\&=\gamma\int\limits_\Omega |u^n|^{\sigma-2}u^n\cdot\psi_k\,dx+f(t,u^n)\int\limits_\Omega g\psi_k dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Жоғарыдағы (3.28) ЖДТ-лер келесі бастапқы шарттармен толықтырғанда

$$u^n(0)=u_0^n,\qquad x\in\Omega \tag{3.29}$$

Коши есебі шығады және төмендегі әлді жинақтылықты қанағаттандырады

$$u_0^n\to u_0(x)\ \ W_0^{1,2}(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)\cap L^\sigma(\Omega)\text{-де } n\to\infty. \tag{3.30}$$

Олай болса, (3.28)-(3.29) Коши есебінің $c_j^n(t)$ шешімі $[0,t_0], t_0\in(0,T]$ уақыт аралығында локалды бар болады. Төмендегі алынған априорлық бағалаулар арқылы Коши есебінің шешімін $[0,T]$ аралығына дейін кеңейтуге болады.

Бірінші және екінші априорлық бағалау *Бұл бөлімде (3.21) жағдайда жуық шешім үшін глобалды априорлық бағалау алынады.*

Лемма 3.2. *Айталық,*

$$u_0(x)\in W_0^{1,2}(\Omega)$$

болсын, сонымен бірге (3.6)-(3.10), (3.21), (3.29)-(3.30) және

$$1<\sigma,p\leqslant 2 \tag{3.31}$$

шарттар орындалсын. Онда барлық $t\in(0,T]$ үшін төмендегі априорлық бағалау орынды

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u^n\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2\right)+\|\nabla u^n\|_{p,Q_T}^p+\|u^n\|_{\sigma,Q_T}^\sigma\leqslant K_0<\infty. \tag{3.32}$$

Егер
$$u_0(x) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega),$$
болса, онда барлық $t \in (0,T]$ үшін екінші априорлық бағалау орынды
$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma \right) + \|u_t^n\|^2_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \leqslant K_1 < \infty. \tag{3.33}$$

Дәлелдеуі 30. *(3.28) өрнекті $c_k^n(t)$ функциясына көбейтіп, k бойынша қосындылап және шыққан нәтиженің екі жағына $\gamma \|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma$-ны қосқанда*
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2\right) + \|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \gamma\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma = 2\gamma\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma + I_1 \tag{3.34}$$
теңдігі шығады, мұндағы
$$\begin{aligned} I_1 =&\frac{1}{g_0(t)}\left(e'(t) + \int\limits_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\cdot\nabla\omega\ dx - \right.\\ &\left. - \gamma\int\limits_\Omega |u^n|^{\sigma-2}u^n\cdot\omega dx\right)\int\limits_\Omega g(x,t)u^n(x)dx = \sum_{i=1}^3 I_{1i}. \end{aligned} \tag{3.35}$$
Енді Гелдер мен Юнг теңсіздіктерін (3.31) *шартымен бірге қолданып (3.34) теңдіктің оң жағын бағалайық*
$$2\gamma\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma \leqslant C(|\gamma|,\Omega,\sigma)\|u^n\|_{2,\Omega}^\sigma \leqslant \frac{1}{8}\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + C^{\frac{2}{2-\sigma}}(\gamma,\Omega,\sigma), \tag{3.36}$$
$$|I_{11}| = \left|\frac{1}{g_0(t)}\int\limits_\Omega gu^n e'(t)dx\right| \leqslant \frac{1}{8}\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2l_0^2}\|g(t)\|_{2,\Omega}^2|e'(t)|^2, \tag{3.37}$$
$$\begin{aligned} &|I_{12}| = \left|\frac{1}{g_0(t)}\int\limits_\Omega gu^n dx\cdot\int\limits_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\cdot\nabla\omega\ dx\right| \leqslant \\ &\frac{1}{l_0}\|g(t)\|_{2,\Omega}\|u^n\|_{2,\Omega}\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^{p-1} \leqslant \\ &\frac{1}{2}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + C(p)\left(\frac{1}{l_0}\|g(t)\|_{2,\Omega}\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}\|u^n\|_{2,\Omega}\right)^p \leqslant \\ &\frac{1}{2}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \frac{1}{8}\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + C_0'(t), \end{aligned} \tag{3.38}$$
мұндағы
$$C_0'(t) = \left(C(p)\frac{1}{l_0}\max_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_{2,\Omega}\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}\right)^{\frac{2}{2-p}}.$$

$$
\begin{gathered}
|I_{13}| = \left| -\frac{1}{g_0(t)}\gamma \int\limits_{\Omega} g u^n dx \cdot \int\limits_{\Omega} |u^n|^{\sigma-2} u^n \omega \; dx \right| \leqslant \\
\frac{1}{l_0}|\gamma| \, \|g\|_{2,\Omega} \|u^n\|_{2,\Omega} \|\omega\|_{\sigma,\Omega} \|u^n\|_{\sigma,\Omega}^{\sigma-1} \leqslant \\
C(\sigma,\Omega)\frac{1}{l_0}|\gamma| \, \|g\|_{2,\Omega} \|\omega\|_{\sigma,\Omega} \|u^n\|_{2,\Omega}^{\sigma} \leqslant \frac{1}{8} \|u^n\|_{2,\Omega}^2 + C_0''(t),
\end{gathered}
\tag{3.39}
$$

мұндағы

$$
C_0''(t) = \left(C(\sigma,\Omega)\frac{1}{l_0}|\gamma| \, \|g(t)\|_{2,\Omega} \|\omega\|_{\sigma,\Omega} \right)^{\frac{2}{2-\sigma}}.
$$

Енді (3.36)-(3.39) теңсіздіктерді (3.34) теңдікке қойғанда, онда

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2 \right) + \|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \gamma \|u^n\|_{\sigma,\Omega}^{\sigma} \leqslant \\
\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + C_0(t) \leqslant \|u^n\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2 + C_0(t),
\end{gathered}
\tag{3.40}
$$

дифференциалдық теңсіздік шығады, мұндағы

$$
C_0(t) = C^{\frac{2}{2-\sigma}}(|\gamma|,\Omega,\sigma) + \frac{2}{l_0^2} \|g(t)\|_{2,\Omega}^2 |e'(t)|^2 + C_0'(t) + C_0''(t)
$$

және (3.8)-(3.10) шарттардың көмегімен $C_0(t) \in L^1([0,T])$ *көруге болады.*

(3.40) теңсіздіктің сол жағындағы екінші және үшінші қосылғыштарды ескермей, содан кейін Гронуолл леммасын

$$
y(t) := \|u^n\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2
$$

функциясы үшін қолдансақ төмендегі бағалау алынады

$$
\begin{gathered}
\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2 \leqslant e^t \left(\|u_0^n\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_0^n\|_{2,\Omega}^2 + \int\limits_0^t C_0(\tau) e^{-\tau} d\tau \right) \leqslant \\
e^T \left(\|u_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_0\|_{2,\Omega}^2 + \int\limits_0^T C_0(\tau) d\tau \right) := K_0' < \infty.
\end{gathered}
\tag{3.41}
$$

Енді (3.40) теңсіздікті τ *бойынша* $0-$*ден* $t-$*ға шейін интегралдап және* $t \in [0,T]$ *бойынша супремум алайық. Одан шыққан нәтижеге (3.41) бағалауды қолданғанда, онда (3.32) априорлық бағалау тұжырымдалады.*

Енді (3.28) өрнекті $\frac{d c_k^n}{d t}$ *функциясына көбейтіп,* k *бойынша қосындылап және одан шыққан нәтижені* τ *бойынша* $0-$*ден* $t \in [0,T]-$*ға шейін инте-*

гралдасақ, онда

$$\begin{gathered}\int_0^t \left(\|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2\right) d\tau + \frac{1}{p}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p = \\ \frac{\gamma}{\sigma}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma + \frac{1}{p}\|\nabla u^n(0)\|_{p,\Omega}^p - \frac{\gamma}{\sigma}\|u^n(0)\|_{\sigma,\Omega}^\sigma + I_2,\end{gathered} \tag{3.42}$$

теңдігі қорытылады, мұндағы

$$\begin{gathered}I_2 = \int_0^t \frac{1}{g_0(\tau)}\left(e'(\tau) + \int_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n \cdot \nabla\omega\ dx - \right. \\ \left. \gamma\int_\Omega |u^n|^{\sigma-2}u^n \cdot \omega dx\right)\int_\Omega g(x,\tau)u_t^n(x,\tau)dxd\tau.\end{gathered} \tag{3.43}$$

Ең алдымен (3.42) теңдіктің екі жағына $\frac{\gamma}{\sigma}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma$*-ны қосып, (3.31) және (3.41) өрнектер арқылы алынатын келесі*

$$\|u^n\|_{\sigma,\Omega} \leqslant C(\sigma,\Omega)\|u^n\|_{2,\Omega} \leqslant C(\sigma,\Omega)K_0^{\frac{1}{2}},\ \forall t\in[0,T], \tag{3.44}$$

бағалауды пайдаланып, сондай-ақ Гелдер теңсіздігін (3.30) және (3.32) шарттармен бірге қолдансақ, онда

$$\begin{gathered}\int_0^t \left(\|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2\right) d\tau + \frac{1}{p}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \frac{\gamma}{\sigma}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma = \\ \frac{2\gamma}{\sigma}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma + \frac{1}{p}\|\nabla u^n(0)\|_{p,\Omega}^p - \frac{\gamma}{\sigma}\|u^n(0)\|_{\sigma,\Omega}^\sigma + I_2 \leqslant \\ \frac{2|\gamma|}{\sigma}C(\sigma,\Omega)K_0^{\frac{\sigma}{2}} + \frac{1}{p}\|\nabla u_0\|_{p,\Omega}^p + \frac{|\gamma|}{\sigma}\|u_0\|_{\sigma,\Omega}^\sigma + |I_2|.\end{gathered} \tag{3.45}$$

теңсіздігі шығады. Мұнан кейін, Гелдер мен Юнг теңсіздіктерін және (3.32) бағалауды пайдаланып I_2 *қосылғышты бағалайық*

$$\begin{gathered}|I_2| \leqslant \frac{1}{l_0}\int_0^t \|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}\|g\|_{2,\Omega}\left(|e'(\tau)| + \|\nabla\omega\|_{p,\Omega}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^{p-1} + \right. \\ \left. |\gamma|\,\|\omega\|_{\sigma,\Omega}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^{\sigma-1}\right) d\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2 d\tau +\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
C\int\limits_0^t \left(|e'(\tau)|^2 + \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^{2(p-1)} + \|u^n\|_{2,\Omega}^{2(\sigma-1)}\right) d\tau \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2\, d\tau + \\
C\left(\int\limits_0^t |e'(\tau)|^2 d\tau + TK_0^{p-1} + TK_0^{\sigma-1}\right) \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2\, d\tau + C_2,
\end{gathered} \tag{3.46}
$$

мұндағы

$$
C_2 = C\left(TK_0^{\frac{p-1}{2}} + TK_0^{\frac{\sigma-1}{2}} + \int\limits_0^t |e'(\tau)|^2 ds\right) < \infty;
$$

$$
C = \frac{1}{2l_0^2}\sup_t \|g\|_{2,\Omega}^2 \cdot \max\left\{1, C^2(p,\Omega)\,\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}^2, C^2(\sigma,\Omega)|\gamma|^2\,\|\omega\|_{\sigma,\Omega}^2\right\}.
$$

Олай болса, (3.46) теңсіздікті (3.42) өрнекке қойғанда

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^t \left(\|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2\right) d\tau + \frac{1}{p}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \frac{\gamma}{\sigma}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma \leqslant \\
C(\sigma,\Omega)(1+\frac{|\gamma|}{\sigma})K_0^{\frac{\sigma}{2}} + \frac{1}{p}\|\nabla u_0\|_{p,\Omega}^p + \frac{|\gamma|}{\sigma}\|u_0\|_{\sigma,\Omega}^\sigma + C_2
\end{gathered} \tag{3.47}
$$

бағалауы қорытылады және одан $t \in [0,T]$ бойынша супремум алсақ, онда екінші априорлық бағалау тұжырымдалады

$$
\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma\right) + \|u_t^n\|_{2,Q_T}^2 + \|\nabla u_t^n\|_{2,Q_T}^2 \leqslant K_1 < \infty. \tag{3.48}
$$

Айталық, $1 < p < \infty$ және $\sigma \leqslant 2^*$ болсын. Бұл жағдайда локалды априорлық бағалаулар алынады.

Лемма 3.3. *Айталық,*

$$
u_0(x) \in W_0^{1,2}(\Omega)
$$

болсын және (3.6)-(3.10), (3.29)-(3.30), (3.21) шарттар орындалсын. Сонымен қатар, келесі шарт орынды болсын

$$
\sigma \leqslant 2^*,\ 2^* = \frac{2d}{d-2}\ \textit{егер}\ d > 2;\quad 2^* \in (1,\infty)\ \textit{егер}\ d = 2 \tag{3.49}
$$

және

$$
2 < \sigma \quad \textit{немесе} \quad 2 < p. \tag{3.50}
$$

Онда K_2 оң саны табылып және (3.56) өрнекпен анықталған $T_1 \in (0,T]$ уақыты үшін $t \in (0,T_1)$ аралығында келесі априорлық бағалау орынды болады

$$
\|u^n\|_{L^\infty(0,T_1;W_0^{1,2}(\Omega))}^2 + \|\nabla u^n\|_{p,Q_{T_1}}^p + \|u^n\|_{\sigma,Q_{T_1}}^\sigma \leqslant K_2 < \infty. \tag{3.51}
$$

Дәлелдеуі 31. *(3.49) шартты пайдаланып (3.34) оң жағындағы $I_{11}-$ден басқа қосылғыштарды бағалайық:*

$$
\begin{aligned}
2\gamma \|u^n\|^\sigma_{\sigma,\Omega} \leqslant C_1'(\Omega,\gamma,\sigma,d)\Big(\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\Big)^{\frac{\sigma}{2}} \leqslant \\
C_1'(\Omega,\gamma,\sigma,d)\Big(1+\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\Big)^{\frac{\sigma}{2}},
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

$$
\begin{aligned}
&|I_{12}| \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u^n\|^p_{p,\Omega} + C(p)\left(\frac{1}{l_0}\|g(t)\|_{2,\Omega}\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}\|u^n\|_{2,\Omega}\right)^p \leqslant \\
&\frac{1}{2}\|\nabla u^n\|^p_{p,\Omega} + C_1''\big(1+\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\big)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

мұндағы

$$C_1'' = C(p)\Big(\frac{1}{l_0}\sup_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_{2,\Omega}\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}\Big)^p.$$

Соболев және Пуанкаре теңсіздіктері көмегімен $I_{13}-$қосылғышты бағалайық

$$
\begin{aligned}
&|I_{13}| \leqslant C(\sigma,d,\Omega)|\gamma|\frac{1}{l_0}\|g(t)\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{\sigma,\Omega}\|\nabla u^n\|^\sigma_{2,\Omega} \leqslant \\
&C_1'''\big(1+\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\big)^{\frac{\sigma}{2}},
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

мұндағы

$$C_1''' = C(\sigma,d,\Omega)|\gamma|\frac{1}{l_0}\sup_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{\sigma,\Omega}\,.$$

(3.52),(3.37), (3.53), (3.54) өрнектерді (3.34) теңдікке қойып, $\tau\in(0,t)$ бойынша интегралдасақ, онда

$$Y(t) + \int_0^t \Big(\|\nabla u^n\|^p_{p,\Omega} + \gamma\|u^n\|^\sigma_{\sigma,\Omega}\Big)\,d\tau \leqslant C_1^0\int_0^t Y^{\mu_1}(\tau)d\tau + C_1^1 \tag{3.55}$$

сызықты емес дифференциалдық теңсіздік қорытылады, мұндағы $\mu_1 := \frac{1}{2}\max\{2,\sigma,p\}$ ((3.50) өрнектен $\mu_1>1$) және

$$Y(t) := 1+\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\,,$$

$$C_1^0(t) = \sup_{t\in(0,T)}\left(C_1'+C_1''+C_1'''+1\right),$$

$$C_1^1 = \frac{1}{l_0^2}\sup_{t\in(0,T)}\|g(t)\|^2_{2,\Omega}\|e'(t)\|^2_{L^2(0,T)} + \Big(1+\|u_0\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u_0\|^2_{2,\Omega}\Big)\,.$$

Енді (3.55) теңсіздіктің сол жағындағы интегралдық қосылғышты ескермей және 1-леммадағы теңсіздікті қолдансақ, онда

$$0 \leqslant t \leqslant T_1 < T_1' := \frac{1}{(\mu_1 - 1) C_1^{1\,\mu_1 - 1} C_1^0} \tag{3.56}$$

мәні үшін келесі бағалау қорытылады

$$Y(t) \leqslant C_1^1 \left[1 - (\mu_1 - 1) C_1^{1\,\mu_1 - 1} C_1^0 t\right]^{-\frac{1}{\mu_1 - 1}}. \tag{3.57}$$

(3.55) теңсіздікті τ бойынша $0-$ден $t-$ға шейін интегралдап, $t \in (0, T_1]$ бойынша супремум алып және (3.57) бағалауды қолданғанда, онда төмендегі априорлық бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t\in[0,T_1]} \left(\|u^n\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2 \right) + \|\nabla u^n\|_{p,Q_{T_1}}^p + \gamma \|u^n\|_{\sigma,Q_{T_1}}^\sigma \leqslant K_2 < \infty. \tag{3.58}$$

келесі қадамда (3.49) жағдайында Галеркин жуықтаулары үшін екінші априорлық бағалауды алайық.

Лемма 3.4. *Айталық, 3.3-лемманың шарттары орындалсын және*

$$u_0(x) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)$$

болсын. Онда K_3 оң тұрақтысы және (3.63) өрнекпен анықталған $T_* \in (0, T_1]$ уақыты табылып, барлық $t \in (0, T_*]$ үшін келесі бағалау орынды

$$\sup_{t\in[0,T_*]} \left(\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma \right) + \|u_t^n\|_{L^2\left(0,T_*;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}^2 \leqslant K_3 < \infty \tag{3.59}$$

Дәлелдеуі 32. *Аналогты түрде (3.46) өрнекке Гелдер теңсіздігін (3.30), (3.58) және*

$$\|u^n\|_{\sigma,\Omega} \leqslant C(\sigma,\Omega) \|\nabla u^n\|_{2,\Omega} \leqslant C(\sigma,\Omega) K_1 := C_2' < \infty, \ \ t \in [0, T_1] \tag{3.60}$$

шарттарымен бірге қолданғанда, онда төмендегі бағалау қорытылады

$$\begin{gathered} |I_2| \leqslant \frac{1}{2} \int_0^t \|u_t^n\|_{2,\Omega}^2 \, d\tau + \frac{1}{2l_0^2} \cdot \int_0^t \|g(\tau)\|_{2,\Omega}^2 \|\nabla \omega\|_{p,\Omega}^2 \|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^{2(p-1)} \, d\tau + \\ \frac{1}{2l_0^2} \int_0^t \|g(\tau)\|_{2,\Omega}^2 \left(|e'(\tau)|^2 + C(\Omega)|\gamma|^2 \|\omega\|_{\sigma,\Omega}^2 \cdot \|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^{2(\sigma-1)} \right) d\tau \leqslant \\ \frac{1}{2} \int_0^t \|u_t^n\|_{2,\Omega}^2 \, d\tau + C_2^0 \int_0^t \left(\frac{1}{p} \|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p \right)^{\mu_2} d\tau + C_2'', \end{gathered} \tag{3.61}$$

мұндағы

$$\mu_2 := \frac{2(p-1)}{p};\;\; C_2^0 = \frac{p^{\mu_2}}{2l_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_{2,\Omega}^2\,\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}^2\,,$$

$$C_2'' = \frac{1}{2l_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_{2,\Omega}^2\int\limits_0^T\Big(|e^{'}(\tau)|^2d\tau + C(\Omega)|\gamma|^2\,\|\omega\|_{\sigma,\Omega}^2\cdot K_2^{\sigma-1}T\Big)\,.$$

(3.61) және (3.60) өрнекті (3.42) теңдікке қойып, (3.30) шарты қолдансақ, төмендегі бағалау алынады

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t\big(\,\|u_t^n\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u_t^n\|_{2,\Omega}^2\,\big)d\tau+\frac{1}{p}\,\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p\leqslant\\ C_2^0\int\limits_0^t\left(\frac{1}{p}\,\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p\right)^{\mu_2}d\tau+C_2^1,\end{gathered}\tag{3.62}$$

мұндағы

$$C_2^1 = \frac{\gamma}{\sigma}{C_2'}^{\sigma}+\frac{1}{p}\,\|\nabla u_0\|_{p,\Omega}^p+\frac{|\gamma|}{\sigma}\,\|u_0\|_{\sigma,\Omega}^{\sigma}+C_2''.$$

Демек, (3.61) өрнектің сол жағындағы алғашқы екі қосылғышты ескермей және 1-лемманы $\frac{1}{p}\,\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p$ функциясына үшін қолдансақ, онда

$$0\leqslant t\leqslant T_*<T_2 := \frac{1}{(\mu_2-1){C_2^1}^{\mu_2-1}C_2^0}\tag{3.63}$$

мәні үшін

$$\frac{1}{p}\,\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p\leqslant C_2^1\left(1-(\mu_2-1){C_2^1}^{\mu_2-1}C_2^0t\right)^{-\frac{1}{\mu_2-1}}\tag{3.64}$$

бағалауы алынады. Демек, (3.64) және (3.60) бағалауларды (3.62) өрнекке ескеріп және $t\in[0,T_*]$ бойынша супремум алсақ, онда (3.59) априорлық бағалау тұжырымдалады.

$n\to\infty$ ***бойынша шектік көшу.*** *(3.32) және (3.51) бағалаудардан төмендегі $*-$әлсіз және әлсіз жинақтылықтар қорытылады*

$$u^n\rightharpoonup u \quad *-\text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\sigma(\Omega))\text{-де},\;\; n\to\infty,\tag{3.65}$$

$$u^n\rightharpoonup u \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(Q_T)\cap L^\sigma(Q_T)\text{-де},\quad n\to\infty,\tag{3.66}$$

$$\nabla u^n\rightharpoonup \nabla u\; *-\text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\cap L^p(\Omega))\text{-де},\;\; n\to\infty\tag{3.67}$$

$$\nabla u^n\rightharpoonup \nabla u \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(Q_T)\cap L^p(Q_T)\text{-де},\quad n\to\infty,\tag{3.68}$$

$$u_t^n\rightharpoonup u_t \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega))\text{-де},\quad n\to\infty.\tag{3.69}$$

Екінші жағынан, (3.51) және (3.33) бағалаудан S және R функцияларының табылатын көруге болады, сәйкесінше

$$|\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\rightharpoonup S \quad \text{әлсіз жинақты } L^{p'}(Q_T)\text{-де},\quad n\to\infty,\tag{3.70}$$

$$|u^n|^{\sigma-2}u^n \rightharpoonup R \quad \textit{әлсіз жинақты } L^{\sigma'}(Q_T)\textit{-де}, \qquad n\to\infty, \tag{3.71}$$

мұндағы $p'=\frac{p}{p-1}$ *және* $\sigma'=\frac{\sigma}{\sigma-1}$ *сандары, сәйкесінше,* p *және* σ *сандарының Гелдер түйіндестері. (3.67) және (3.69) өрнектерден, компакт және үзіліссіз енгізулерге байланысты, яғни*

$$W_0^{1,s}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega), \qquad \forall\, r: 2\leqslant r< s^*, \quad s=\max\{2,p\}$$

және Обэн-Лионс компактілік леммасынан төмендегі әлді жинақтылық алынады

$$u^n \longrightarrow u \quad \textit{әлді жинақты } L^s(0,T;L^r(\Omega))\textit{-де},\ 2\leqslant r<s^*,\ n\to\infty, \tag{3.72}$$

және жеке жағдайда,

$$u^n \longrightarrow u \quad \textit{әлді жинақты } L^2(0,T;L^2(\Omega))\textit{-де}, \qquad n\to\infty, \tag{3.73}$$

мұндағы s^* *саны* s *санының Соболев түйіндесі, яғни* $s^*=\frac{ds}{d-s}, d>s$.

Енді (3.73) әлді жинақтылық пен Рисс-Фишер теоремасы бойынша u^n *тізбегінің іштізбегі үшін барлық дерлік нүктедегі жинақтылық алынады, яғни*

$$u^n \longrightarrow u \quad \textit{барлық дерлік нүктеде } Q_T\textit{-де}, \qquad n\to\infty, \tag{3.74}$$

(3.71) өрнегімен бірге (1.3-лемма [12, 12 б.])

$$|u^n|^{\sigma-2}u^n \rightharpoonup |u|^{\sigma-2}u \quad \textit{әлсіз жинақты } L^{\sigma'}(Q_T)\textit{-де}, \qquad n\to\infty. \tag{3.75}$$

Сонымен қатар, (3.25) және (3.69), (3.72) ұйғарымдарынан келесі нәтиже орынды болып табылады

$$u^n \longrightarrow u \quad \textit{әлді жинақты} \quad L^{\sigma}(Q_T)\textit{-де}, \qquad n\to\infty, \qquad \sigma<2^*$$

және

$$\|u^n\|_{\sigma,Q_t} \longrightarrow \|u\|_{\sigma,Q_t} \qquad n\to\infty. \tag{3.76}$$

Айталық, $\eta(t)$ *үзіліссіз әрі* $[0,T]$ *аралығында дифференциалданатын функция болсын, мұндағы* T *бірінші және екінші априорлық бағалауларды қанағаттандыратын максималды уақыт. (3.28) өрнекті* η *функциясына көбейтіп және* $t\in[0,T]$ *бойынша интегралдасақ, онда*

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}(u_t^n\cdot z_k+\nabla u_t^n\cdot\nabla z_k)dxdt+\int\limits_{Q_T}|\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\cdot\nabla z_k\,dxdt=\\ \gamma\int\limits_{Q_T}|u^n|^{\sigma-2}u^n\cdot z_k\,dxdt+\int\limits_0^T\left[\frac{1}{g_0(t)}\,(e'(t)+\right.\\ \left.\int\limits_\Omega|\nabla u^n|^{p-2}\,\nabla u^n\cdot\nabla\omega\;dx-\gamma\int\limits_\Omega|u^n|^{\sigma-2}u^n\cdot\omega dx\right)\int\limits_\Omega g\cdot z_k\,dx\right]dt\end{gathered} \tag{3.77}$$

теңдік алынады және жоғарыдағы (3.69), (3.70), (3.75) және (3.66) нәтижелерден барлық $z_k = \psi_k(x)\eta(t), \quad k \in \{1, \ldots, n\}$ *үшін*

$$\int\limits_{Q_T} (u_t \cdot z_k + \nabla u_t \cdot \nabla z_k) dxdt + \int\limits_{Q_T} S \cdot \nabla z_k \, dxdt =$$

$$\gamma \int\limits_{Q_T} |u|^{\sigma-2} u \cdot z_k \, dxdt + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \right.\right. \tag{3.78}$$

$$\left.\left. + \int\limits_\Omega S \cdot \nabla \omega \; dx - \gamma \int\limits_\Omega |u|^{\sigma-2} u \cdot \omega dx \right) \int\limits_\Omega g \cdot z_k \, dx \right] dt.$$

теңдігі тұжырымдалады.

(3.78) өрнектің аргументінің сызықтылығы мен үзіліссіздігі көмегімен төмендегі нәтиже орынды, яғни

$$z \in Z := \{ z = \psi \zeta : \psi \in \mathcal{V}, \; \zeta \in C_0^\infty(0, T) \}.$$

Енді монотондылық әдісті қолданып төмендегі теңдікті дәлелдейік

$$S = |\nabla u|^{p-2} \nabla u \tag{3.79}$$

Біріншіден Z *жиыны* $L^\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; V_p(\Omega)) \cap L^\sigma(Q_T)$*−де тығыз, олай болса,* $z = u^n$ *және* $z = u$ *тест функцияларын (3.77) және (3.78) өрнектерге қойғанда, сәйкесінше, төмендегі теңдіктер алынады*

$$\int\limits_{Q_T} (u_t^n \cdot u^n + \nabla u_t^n \cdot \nabla u^n) dxdt + \int\limits_{Q_T} |\nabla u^n|^p \, dxdt =$$

$$\gamma \int\limits_{Q_T} |u^n|^\sigma \, dxdt + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \right.\right. \tag{3.80}$$

$$\left.\left. \int\limits_\Omega |\nabla u^n|^{p-2} \nabla u^n \nabla \omega \; dx - \gamma \int\limits_\Omega |u^n|^{\sigma-2} u^n \omega dx \right) \int\limits_\Omega g u^n dx \right] dt.$$

және

$$\int\limits_{Q_T} (u_t \cdot u + \nabla u_t \cdot \nabla u) dxdt + \int\limits_{Q_T} S \cdot \nabla u \, dxdt =$$

$$\gamma \int\limits_{Q_T} |u|^\sigma \, dxdt + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \right.\right. \tag{3.81}$$

$$\left.\left. \int\limits_\Omega S \cdot \nabla \omega \; dx - \gamma \int\limits_\Omega |u|^{\sigma-2} u \cdot \omega dx \right) \int\limits_\Omega g \cdot u \, dx \right] dt.$$

Келесі, (3.21) жинақтылықпен қатар монотонды $F(\xi) = |\xi|^{r-2}\xi, r = p$ операторының ([60] қараңыз) қасиетін қолдансақ, онда барлық $z \in Z$ үшін төмендегі өрнек орынды

$$X_n := \int\limits_{Q_T} \left(|\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n - |\nabla z|^{p-2}\nabla z\right) \cdot (\nabla u^n - \nabla z)dxdt \geqslant 0 \tag{3.82}$$

(3.82) және (3.80) өрнекті ескерсек, онда

$$\begin{gathered}0 \leqslant X_n = \gamma \int\limits_{Q_T} |u_n|^\sigma \, dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega gu^n \, dx \left[\frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \right.\right. \\ \left.\left. \int\limits_\Omega |\nabla u^n|^{p-2} \nabla u^n \cdot \nabla \omega \; dx - \gamma \int\limits_\Omega |u^n|^{\sigma-2} u^n \cdot \omega dx \right)\right] dt - \\ \int\limits_{Q_T} (u_t^n u^n + \nabla u_t^n \nabla u^n) \; dxdt - \int\limits_{Q_T} |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n \cdot \nabla z \, dxdt - \\ \int\limits_{Q_T} |\nabla z|^{p-2}\nabla z \nabla u^n \, dxdt + \int\limits_{Q_T} |\nabla z|^p \, dxdt := X_n^1 + X_n^2 \\ + X_n^3 - X_n^4 - X_n^5 - X_n^6 - X_n^7 - X_n^8 + \int\limits_{Q_T} |\nabla z|^p \, dxdt.\end{gathered} \tag{3.83}$$

өрнегі шығады. X_n^5 және X_n^6 қосылғыштардың жинақтылығына байланысты ([55] қараңыз) келесі ұйғарымды айта кету керек

$$u \in C_w([0, T]; W_0^{1,2}(\Omega)), \tag{3.84}$$

мұндағы $C_w([0, T]; W_0^{1,2}(\Omega))$ арқылы $W_0^{1,2}(\Omega)$-де Банах мәнді $[0, T]$ аралығында үзіліссіз $L^\infty([0, T]; W_0^{1,2}(\Omega))$ кеңістігінің ішкеңістігін белгілейді. Демек, (3.84) өрнек бойынша $u(0)$, $u(T)$, $\nabla(u(0))$ және $\nabla(u(T)))$ шамаларының мәні бар деген сөз.

(3.83) өрнектен $\limsup$ *алып,* $\limsup$ *және* $\liminf$ *қасиеттерін қолданып, және X_n^1 қосылғыш үшін (3.76) жинақтылықты, X_n^2 және X_n^8 қосылғыштар үшін (3.70) жинақтылықты, X_n^4 қосылғыш үшін (3.75) жинақтылықты, сонымен бірге X_n^5 және X_n^6 қосылғыштар үшін (3.69) жи-*

нақтылықты ескерсек, онда

$$0 \leqslant \gamma \int\limits_{Q_T} |u|^\sigma \, dxdt + \int\limits_0^T \left[\frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \int\limits_\Omega S \cdot \nabla \omega \, dx - \right.\right.$$
$$\left.\left. \gamma \int\limits_\Omega |u|^{\sigma-2} u \cdot \omega dx \right) \int\limits_\Omega g \cdot u \, dx \right] dt - \int\limits_{Q_T} (u_t \cdot u + \nabla u_t \cdot \nabla u) \; dxdt - \tag{3.85}$$
$$\int\limits_{Q_T} S \cdot \nabla z \, dxdt - \int\limits_{Q_T} |\nabla z|^{p-2} \nabla z \cdot \nabla u \, dxdt + \int\limits_{Q_T} |\nabla z|^p \, dxdt.$$

шектік көшу алынады. (3.81) өрнекті (3.85) шектік көшумен біріктіргенде

$$\int\limits_{Q_T} \left(S - |\nabla z|^{p-2} \nabla z \right) \cdot (\nabla u - \nabla z) \, dxdt \geqslant 0, \qquad \forall \; z \in Z \tag{3.86}$$

өрнегі қорытылады. (3.86) өрнек кез келген $z \in L^p(0,T;V_p) \cap L^\sigma(Q_T)$ *үшін орынды. Мәселен,* $z = u \pm \delta\xi$ *түрінде еркін* $\xi \in L^p(0,T;V_p) \cap L^\sigma(Q_T)$ *және* $\delta > 0$ *үшін алсақ, онда (3.86) өрнектен*

$$\pm \int\limits_{Q_T} \left(S - |\nabla u \mp \delta \nabla \xi|^{p-2} \left(\nabla u \mp \delta \nabla \xi \right) \right) \cdot \nabla \xi \, dxdt \geqslant 0. \tag{3.87}$$

тұжырым алынады. (3.87) тұжырымда $\delta \to 0$ *болса, онда*

$$\pm \int\limits_{Q_T} \left(S - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \cdot \nabla \xi \, dxdt \geqslant 0. \tag{3.88}$$

өрнек шығады. ξ *еркін түрде таңдалғандығынан* $S = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$ *тұжырымы орынды, демек (3.79) дәлелденді.*

3.3. Абсорбция мүшемен берілген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есептің әлсіз шешімнің бар болуы мен жалғыздығы

Бұл бөлімде (3.11)-(3.14) есебі σ көрсеткіші мен γ коэффициентінің, сәйкесінше, $1 < \sigma < \infty$ және

$$\gamma \leqslant 0. \tag{3.89}$$

мәндері қарастырылады. Аталмыш жағдайда (3.11)-(3.14) тура есебінің шешімінің бар болуы туралы төмендегі теорема орынды.

Теорема 3.3. *[Глобалды бар болуы] Айталық, (3.6)-(3.10), (3.89) шарттар орындасын және*

$$1 < \sigma,\ p \leqslant 2 \tag{3.90}$$

болсын. Онда (3.11)-(3.14) тура есебінің кез келген $t \in [0, T]$ үшін кемінде бір $u(x, t)$ әлсіз шешімі бар болады. Сондай-ақ, әлсіз шешім келесі бағалауларды қанағаттандырады

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|u\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u\|^2_{2,\Omega}\right) + \|\nabla u\|^p_{p,Q_T} + \|u\|^\sigma_{\sigma,Q_T} \leqslant C_1, \tag{3.91}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|\nabla u\|^p_{p,\Omega} + \|u(t)\|^\sigma_{\sigma,\Omega}\right) + \|u_t\|^2_{2,Q_T} + \|\nabla u_t\|^2_{2,Q_T} \leqslant C_2. \tag{3.92}$$

Теорема 3.4. *[Локалды бар болуы] Айталық, (3.5), (3.6)-(3.10), (3.89) шарттар орындалсын және*

$$2 < \sigma \quad \textit{немесе} \quad 2 < p. \tag{3.93}$$

болсын. Онда ақырлы $T_* \in (0, T]$ уақыты табылып, (3.11)-(3.14) тура есебінің кемінде бір $u(x, t)$ әлсіз шешімі $t \in [0, T_*]$ үшін бар болады. Сонымен қатар, $u(x, t)$ әлсіз шешімі барлық $t \in [0, T_*]$ үшін (3.91) және (3.92) априорлық бағалауларды қанағаттандырады, мұндағы $T_* := T_4$ және T_4 ақырлы уақыты төменде (3.114) өрнекпен анықталады.

Ескерту 3.2. *$\gamma \leqslant 0$ жағдайында, 3.3-теоремадағы $\sigma \leqslant 2^*$ шарт қажеттілік тудырмайды. Демек, (3.89) шартты $F(\xi) = |\xi|^{r-2}\xi, r = p$ немесе $r = \sigma$ операторының монотондылық қасиетімен бірге қолдансақ, онда $|\gamma|$ мәні үшін төмендегі өрнек шығады*

$$\begin{aligned} X_n := \int\limits_{Q_T} &\left(|\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n - |\nabla z|^{p-2}\nabla z\right) \cdot (\nabla u^n - \nabla z)dxdt + \\ &|\gamma| \left(|u^n|^{\sigma-2}u^n - |z|^{\sigma-2}z\right) \cdot (u^n - z)dxdt \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Олай болса, (3.83) өрнек келесі түрде болады

$$0 \leqslant X_n = \int\limits_0^T \left[\frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \int\limits_\Omega |\nabla u^n|^{p-2} \nabla u^n \cdot \nabla \omega \, dx + \right.\right.$$
$$\left.\left. |\gamma| \int\limits_\Omega |u^n|^{\sigma-2} u^n \cdot \omega dx \right) \right] \int\limits_\Omega g u^n \, dxdt - \int\limits_{Q_T} \left(u_t^n u^n + \nabla u_t^n \nabla u^n \right) dxdt -$$
$$\int\limits_{Q_T} |\nabla u^n|^{p-2} \nabla u^n \cdot \nabla z \, dxdt - \int\limits_{Q_T} |\nabla z|^{p-2} \nabla z \nabla u^n \, dxdt + \int\limits_{Q_T} |\nabla z|^p \, dxdt - \tag{3.95}$$
$$- |\gamma| \int\limits_{Q_T} |u^n|^{\sigma-2} u^n \cdot z \, dxdt - |\gamma| \int\limits_{Q_T} |z|^{\sigma-2} z \cdot u^n \, dxdt + \int\limits_{Q_T} |z|^\sigma \, dxdt :=$$
$$X_n^1 + X_n^2 + X_n^3 - X_n^4 - X_n^5 - X_n^6 - X_n^7 +$$
$$\int\limits_{Q_T} |\nabla z|^p \, dxdt - X_n^8 - X_n^9 + \int\limits_{Q_T} |z|^\sigma \, dxdt.$$

Бұл жағдайда, X_3 және X_8 қосылғыштарының жинақтылығы үшін (3.75) өрнек орынды, ал қалған қосылғыштар үшін жинақтылық өткен бөлімдегі секілді([55], 17 б. қараңыз).

Дәлелдеуі 33. *3.3 және 3.4-теоремаларды дәледеу үшін (3.32) және (3.33), сәйкесінше, бірінші және екінші априорлық бағалаулардың орынды болатынын $\gamma \leqslant 0$ жағдайында дәлелдеу керек. Мұнан соң, 29-бөлім секілді шектік көшу тұжырымдалады.*

Глобалды және локалды бағалаулар

Лемма 3.5. *Айталық,*

$$u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega) \tag{3.96}$$

болсын және (3.6)-(3.10) және (3.89) шарттар орындалсын. Егер (3.90) шарт орындалса, онда барлық $t \in (0, T]$ үшін келесі априорлық бағалау (уақыт бойынша глобалды) орынды

$$\|u^n\|^2_{L^\infty\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} + \|\nabla u^n\|^p_{p,Q_T} + \|u^n\|^\sigma_{\sigma,Q_T} \leqslant K_4 < \infty, \tag{3.97}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|\nabla u^n\|^p_{p,\Omega} + \|u^n\|^\sigma_{\sigma,\Omega} \right) + \|u_t^n\|^2_{L^2\left(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \leqslant K_5 < \infty. \tag{3.98}$$

Егер (3.90) шарттың орнына (3.93) орынды болса, онда ақырлы $T_3 \in (0, T]$ және $T_4 \in (0, T_3]$ уақыты табылып, барлық $t \in (0, T_3]$ үшін (3.97) бағалау және барлық $t \in (0, T_4]$ үшін (3.98) бағалау орынды, мұндағы T_3 және T_4 мәні (3.108) және (3.113) өрнектермен анықталады.

Дәлелдеуі 34. *Демек,(3.89) жағдайда, (3.34) және (3.42) энергетикалық теңдіктер келесі түрде болады*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\right)+\|\nabla u^n\|^p_{p,\Omega}+|\gamma|\,\|u^n\|^\sigma_{\sigma,\Omega}=I'_1, \tag{3.99}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t\left(\|u^n_t(\tau)\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n_t(\tau)\|^2_{2,\Omega}\right)d\tau+\frac{1}{p}\|\nabla u^n\|^p_{p,\Omega}+\frac{|\gamma|}{\sigma}\|u^n\|^\sigma_{\sigma,\Omega}=\\ \frac{1}{p}\|\nabla u_0\|^p_{p,\Omega}+\frac{|\gamma|}{\sigma}\|u_0\|^\sigma_{\sigma,\Omega}+I'_2,\end{gathered} \tag{3.100}$$

мұндағы

$$\begin{aligned}I'_1=&\frac{1}{g_0(t)}\left(e'(t)+\int\limits_\Omega|\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\cdot\nabla\omega\;dx\right.\\ &\left.+|\gamma|\int\limits_\Omega|u^n|^{\sigma-2}u^n\cdot\omega dx\right)\int\limits_\Omega g(x,t)u^n(x)dx=\sum_{i=1}^3 I'_{1i},\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}I'_2=&\frac{1}{g_0(t)}\left(e'(t)+\int\limits_\Omega|\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\cdot\nabla\omega\;dx\right.\\ &\left.+|\gamma|\int\limits_\Omega|u^n|^{\sigma-2}u^n\cdot\omega dx\right)\int\limits_\Omega g(x,t)u^n_t(x)dx.\end{aligned} \tag{3.102}$$

Гелдер және Юнг теңсіздіктерін қолданып, I'_{13} қосылғышты бағалайық. Ал, I'_{11} және I'_{12} қосылғыштар үшін $\sigma,p>1$ жағдайда, сәйкесінше, (3.37) және (3.38) теңсіздіктер орынды.

$$|I'_{13}|\leqslant\frac{|\gamma|}{l_0}\|g\|_{2,\Omega}\|u^n\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{\sigma,\Omega}\|u^n\|^{\sigma-1}_{\sigma,\Omega}\leqslant\frac{|\gamma|}{2}\|u^n\|^\sigma_{\sigma,\Omega}+C_3\|u^n\|^\sigma_{2,\Omega}, \tag{3.103}$$

мұндағы

$$C_3=\frac{|\gamma|}{2l_0^\sigma}\sup_{t\in[0,T]}\|g(t)\|^\sigma_{2,\Omega}\|\omega\|^\sigma_{\sigma,\Omega}.$$

Келесі (3.37), (3.53), (3.103) өрнектерді (3.99) теңдікке қойып және дифференциал астына 1−ді қоссақ, онда төмендегі теңсіздік қорытылады

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(1+\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\right)+\|\nabla u^n\|^p_{p,\Omega}+|\gamma|\,\|u^n\|^\sigma_{\sigma,\Omega}\leqslant\\ \frac{1}{4}\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\frac{1}{l_0^2}\|g(t)\|^2_{2,\Omega}|e'(t)|^2+2C_3\left(\|u^n\|^2_{2,\Omega}\right)^{\frac{\sigma}{2}}+\\ 2C''_1(t)\big(1+\|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\big)^{\frac{p}{2}}\leqslant C^0_3\big(1+\\ \|u^n\|^2_{2,\Omega}+\|\nabla u^n\|^2_{2,\Omega}\big)^{\mu_3}+C'_3,\end{gathered} \tag{3.104}$$

мұндағы

$$\mu_3=\max\{1,\frac{p}{2},\frac{\sigma}{2}\};\ C_3^0=\frac{1}{4}+2C_3+2C_1'';\ C_3'=\frac{1}{l_0^2}\|g(t)\|_{2,\Omega}^2|e'(t)|^2$$

және C_1'' *саны (3.53) өрнекпен анықталады. (3.104) өрнекті* $\tau\in(0,t)$ *бойынша интегралдасақ, онда*

$$Y(t)+\|\nabla u^n\|_{p,Q_t}^p+|\gamma|\,\|u^n\|_{\sigma,Q_t}^\sigma\leqslant C_3^0\int\limits_0^t Y^{\mu_3}(\tau)d\tau+C_3^1, \tag{3.105}$$

теңсіздік алынады, мұндағы

$$Y(t)=1+\|u^n\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2;$$

$$C_3^1:=1+\|u_0\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u_0\|_{2,\Omega}^2+\frac{1}{l_0^2}\sup_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_{2,\Omega}^2\int\limits_0^T|e'(t)|^2dt.$$

(3.105) өрнекке $\mu_3=1$ *және (3.90) жағдайда сызықты Гронуолл теңсіздігін, ал* $\mu_3>1$ *және (3.93) жағдайда сызықты емес Гронуолл теңсіздігін (1-лемма) қолданғанда төмендегі теңсіздіктер қорытылады*

$$Y(t)\leqslant C_3^1\cdot e^{C_3^0T}<\infty,\quad \forall t\in[0,T],\ \mu_3=1\ \textit{жағдайда}, \tag{3.106}$$

және

$$Y(t)\leqslant C_3^1\left[1-(\mu_3-1)C_3^{1\,\mu_3-1}C_3^0t\right]^{-\frac{1}{\mu_3-1}}<\infty, \tag{3.107}$$

$$0\leqslant t<T_3:=\frac{1}{(\mu_3-1)C_3^{1\,\mu_3-1}C_3^0},\ \mu_3>1\ \textit{жағдайда}. \tag{3.108}$$

Демек, (3.106) және (3.107) өрнектерді (3.105) теңсіздікке қойып және t *бойынша супремум алғанда, келесі энергетикалық бағалау тұжырымдалады*

$$\sup_{t\in(0,T_*')}\left(\|u^n\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u^n\|_{2,\Omega}^2\right)+\|\nabla u^n\|_{p,Q_{T_*'}}^p+\|u^n\|_{\sigma,Q_{T_*'}}^\sigma\leqslant K_4, \tag{3.109}$$

егер (3.90) болса, онда $T_*'=T$ *және егер (3.93) болса, онда* $T_*'=T_3$.
Енді Гелдер мен Коши теңсіздіктерін қолданып, I_2' *қосылғышын бағалайық*

$$|I_2'|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t\|u_t^n\|_{2,\Omega}^2\,d\tau+\frac{1}{2l_0^2}\cdot\int\limits_0^t\|g(\tau)\|_{2,\Omega}^2\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}^2\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^{2(p-1)}d\tau+$$

$$\frac{1}{2l_0^2}\int\limits_0^t\|g(\tau)\|_{2,\Omega}^2\left(|e'(\tau)|^2+C(\Omega)|\gamma|^2\|\omega\|_{\sigma,\Omega}^2\cdot\|\nabla u^n\|_{\sigma,\Omega}^{2(\sigma-1)}\right)d\tau\leqslant \tag{3.110}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t\|u_t^n\|_{2,\Omega}^2\,d\tau+C_4^0\int\limits_0^t\left(1+\frac{1}{p}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p+\frac{\gamma}{\sigma}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma\right)^{\mu_4}d\tau,$$

мұндағы

$$\mu_4 := \max\{\frac{2(p-1)}{p}, \frac{2(\sigma-1)}{\sigma}\},$$

$$C_4^0 := \frac{1}{2l_0^2} \sup_{t\in[0,T]} \|g(t)\|_{2,\Omega}^2 \cdot \max\{\|\nabla\omega\|_{p,\Omega}^2, |e'(t)|^2 + C(\Omega)|\gamma|^2 \|\omega\|_{\sigma,\Omega}^2\}.$$

Олай болса, (3.110) бағалауды (3.100) өрнекке қойып және екі жағына 1−ді қосқанда, онда

$$Z(t) := 1 + \frac{1}{p}\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \frac{|\gamma|}{\sigma}\|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma > 1$$

функциясы үшін

$$Z(t) + \int_0^t \left(\|u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_t^n(\tau)\|_{2,\Omega}^2\right) d\tau \leqslant C_4^1 + C_4^0 \int_0^t Z^{\mu_4}(\tau) d\tau \qquad (3.111)$$

теңсіздігі қорытылады, мұндағы

$$C_4^1 := 1 + \frac{1}{p}\|\nabla u_0\|_{p,\Omega}^p + \frac{|\gamma|}{\sigma}\|u_0\|_{\sigma,\Omega}^\sigma.$$

(3.111) теңсіздіктің сол жағындағы интегралдық қосылғышты ескермей, $\mu_4 \leqslant 1$ және (3.90) жағдайда сызықты Гронуолл теңсіздігін, $\mu_4 > 1$ және (3.93) жағдайда сызықты емес Гронуолл теңсіздігін (1-лемма) қолдансақ, онда төмендегі дифференциалдық теңсіздіктер қорытылады

$$Z(t) \leqslant C_4^1 \cdot e^{C_4^0 T} < \infty, \quad \forall t \in [0,T] \qquad (3.112)$$

және

$$0 < t < T_4 \equiv \min\{T_3, \frac{1}{(\mu_4 - 1)C_4^0 (C_4^1)^{\mu_4 - 1}}\} \qquad (3.113)$$

үшін

$$Z(t) \leqslant C_4^1 \left(1 - (\mu_4 - 1)C_4^0 (C_4^1)^{\mu_4-1} T\right)^{-\frac{1}{\mu_4 - 1}}. \qquad (3.114)$$

(3.112) және (3.114) теңсіздіктерді (3.111) өрнекке қойып, t бойынша супремум алғансақ, онда

$$\sup_{t\in[0,T_{max}]} \left(\|\nabla u^n\|_{p,\Omega}^p + \|u^n\|_{\sigma,\Omega}^\sigma\right) + \|u_t^n\|_{L^2\left(0,T_{max};W_0^{1,2}(\Omega)\right)}^2 \leqslant K_5 < \infty, \qquad (3.115)$$

екінші энергетикалық бағалау тұжырымдалады, мұндағы (3.90) жағдайда $T_{max} = T$ және (3.93) жағдайда $T_{max} = T_4 \leqslant T_3$.

Қорыта келе, глобалды және локалды әлсіз шешімнің бар болуы туралы 3.1, 3.2, 3.3 және 3.4-теоремаларды ескере отырып, сонымен бірге (3.11)-(3.14) тура есебінің (3.1)-(3.4) кері есебіне эквиваленттілігі туралы 3.1-леммаға сүйеніп бастапқы қойылған кері есеп үшін келесі нәтижелер тұжырымдалады.

Теорема 3.5 (Глобалды бар болуы). *Айталық, (3.6)-(3.10), (3.21) шарттар орындалсын, сондай-ақ, σ, p көрсеткіштері (3.22) шартты қанағаттандырсын Онда (3.1)-(3.4) кері есебінің глобалды әлсіз шешімі бар болады. Сонымен қатар, әлсіз шешім үшін*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|u(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u(t)\|_{2,\Omega}^2\right) + \|\nabla u\|_{p,Q_T}^p + \|u\|_{\sigma,Q_T}^\sigma + \|f\|_{L^2[0,T]}^2 \leqslant C_1, \tag{3.116}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\|\nabla u(t)\|_{p,\Omega}^p + \|u(t)\|_{\sigma,\Omega}^\sigma\right) + \|u_t\|_{2,Q_T}^2 + \|\nabla u_t\|_{2,Q_T}^2 + \|f\|_{L^2[0,T]}^2 \leqslant C_2, \tag{3.117}$$

априорлық бағалаулары орынды, мұндағы C_1 және C_2 есептің берілгендерінен тәуелді тұрақтылар.

Теорема 3.6 (Локалды бар болуы). . *Айталық, (3.6)-(3.10), (3.21) шарттар орындалсын, сондай-ақ, σ, p көрсеткіштері (3.25) шартпен бірге (3.26) ұйғарымын қанағаттандырсын. Онда (3.63) өрнекпен анықталған ақырлы $T_* \in (0,T)$ уақыты табылап, (3.1)-(3.4) кері есебінің кемінде бір локалды әлсіз шешімі бар болады. Сонымен қатар, әлсіз шешім барлық $t \in (0,T_*]$ үшін (3.116)-(3.117) априорлық бағалауды қанағаттандырады.*

3.4. Жалғыздығы

Теорема 3.7. *Айталық, төмендегі шарттар орындалсын*

$$2 \leqslant p \leqslant 4, \tag{3.118}$$

$$\nabla\omega \in L^{\frac{2p}{4-p}}(\Omega) \tag{3.119}$$

және

$$2 \leqslant \sigma \leqslant \frac{2d}{d-s}, d > s, \quad \textit{мұндағы } s \in \{2,p\}. \tag{3.120}$$

Егер $\gamma \leqslant 0$ жағдайда (3.118)-(3.120) шарттарымен бірге 3.2 және 3.4-лемманың барлық шарты орындалсын.

Егер $\gamma > 0$ жағдайда (3.118)-(3.120) шарттарымен бірге 3.5-лемманың барлық шарты орындалсын. Онда (3.11)-(3.14) тура есебінің әлсіз шешімі жалғыз болады және оған эквивалентті (3.1)-(3.4) кері есебінің де әлсіз шешімі жалғыз, мұндағы 2^* және p^* сандары, сәйкесінше, 2 және p сандарының Соболев түйіндесі.

Ескерту 3.3. *(3.120) өрнектегі $s \in \{2,p\}$ шартты келесі түрде түсіну қажет, егер $s = \max\{2,p\}$ болса, онда σ көрсеткіші жеткілікті үлкен болады немесе егер $s = \min\{2,p\}$ болса, онда d өлшемі жеткілікті аз болады.*

Дәлелдеуі 35. *u_1 және u_2 функциялары (3.11)-(3.13) есебінің 3.1-анықтама мағынасындағы әлсіз шешімі болсын. Мұнан соң, (4.1) өрнекке* *тест функциясы ретінде* $u := u_1 - u_2$ *функцияны қолданып,* u_1 *үшін теңдеуден* u_2 *үшін теңдеуді алып тастағанда*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u\|^2_{2,\Omega}\right) + D = G + F, \tag{3.121}$$

дифференциалдық теңдік шығады, мұндағы

$$\begin{aligned} D &= \int\limits_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\right)\cdot\nabla u\, dx;\\ G &= \gamma\int\limits_\Omega \left(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma-2}u_2\right)\cdot u\, dx;\\ F &= \frac{1}{g_0(t)}\left(\int\limits_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\right)\cdot\nabla\omega\, dx\right.\\ &\quad\left. - \gamma\int\limits_\Omega \left(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma-2}u_2\right)\cdot\omega\, dx\right)\int\limits_\Omega g(x,t)u dx. \end{aligned} \tag{3.122}$$

Айталық, $\gamma \leqslant 0$ *болсын. Онда (25) теңсіздік немесе монотонды оператордың қасиеті бойынша, келесі шарттар орынды*

$$D \geqslant 0, \quad G \leqslant 0. \tag{3.123}$$

Гелдер мен Юнг теңсіздіктерін және 2-леммадағы (24) өрнекті $\delta = 0$ *мәнімен қолданып,* $F-$*ті бағалайық*

$$\begin{aligned} |F| &\leqslant \frac{1}{k_0}\|g\|_{2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega}\left(\int\limits_\Omega C|\nabla u|\left(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|\right)^{p-2}|\nabla\omega|\, dx\right.\\ &+|\gamma|\int\limits_\Omega \left.\left(|u|\left(|u_1| + |u_2|\right)^{\sigma-2}|\omega|\, dx\right)\right) \leqslant \frac{1}{k_0}\|g\|_{2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega}\\ &\|\nabla u\|_{2,\Omega}\left[\left(\|\nabla u_1 + \nabla u_2\|_{p,\Omega}\right)^{p-2}\|\nabla\omega\|_{\frac{2p}{4-p},\Omega}\right.\\ &\left.+ |\gamma|\,\|u\|_{2^*,\Omega}\left(\|u_1 + u_2\|_{\frac{(\sigma-2)d}{2},\Omega}\right)^{\sigma-2}\|\omega\|_{2^*,\Omega}\right] \leqslant\\ &\frac{1}{k_0}\|g\|_{2,\Omega}\|u\|_{2,\Omega}\|\nabla u\|_{2,\Omega}\left[\left(\|\nabla u_1\|_{p,\Omega} + \|\nabla u_2\|_{p,\Omega}\right)^{p-2}\|\nabla\omega\|_{\frac{2p}{4-p},\Omega} + \right.\\ &\left.C(\Omega)|\gamma|\left(\|\nabla u_1\|_{s,\Omega} + \|\nabla u_2\|_{s,\Omega}\right)^{\sigma-2}\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}\right] \leqslant\\ &\frac{1}{2}b_1(t)\left(\|u\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u\|^2_{2,\Omega}\right), p \leqslant 4, \quad \sigma \leqslant \frac{2d}{d-s},\\ &\frac{(\sigma-2)d}{2} \leqslant \frac{ds}{d-s} := s^* \Leftrightarrow \sigma \leqslant \frac{2d}{d-s} \end{aligned} \tag{3.124}$$

мұндағы

$$b_1(t) = \frac{1}{k_0}\|g\|_{2,\Omega}\left[\left(\|\nabla u_1\|_{p,\Omega} + \|\nabla u_2\|_{p,\Omega}\right)^{p-2}\|\nabla\omega\|_{\frac{2p}{4-p},\Omega}\right.$$

$$\left. + C(\Omega)|\gamma|\left(\|\nabla u_1\|_{s,\Omega} + \|\nabla u_2\|_{s,\Omega}\right)^{\sigma-2}\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}\right].$$

2. Енді $\gamma > 0$ жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда (3.121) өрнектен, төмендегі теңсіздік қорытылады

$$\frac{d}{dt}y(t) \leqslant |G| + |F|, \tag{3.125}$$

мұндағы

$$y(t) = \|u\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u\|^2_{2,\Omega}.$$

2-леммадағы екінші теңсіздікті $\delta = 0$ мәнінде қолдансақ, онда келесі түрдегі бағалау алынады

$$\begin{gathered}|G| = \left|\gamma\int\limits_\Omega \left(|u_1|^{\sigma-2}u_1 - |u_2|^{\sigma-2}u_2\right)\cdot u\right| dx \leqslant |\gamma|\int\limits_\Omega |u|^2\left(|u_1| + \right. \\ \left.|u_2|\right)^{\sigma-2}dx \leqslant |\gamma|\,\|u\|^2_{\frac{2d}{d-2},\Omega}\||u_1| + |u_2|\|^{\sigma-2}_{\frac{(\sigma-2)d}{2},\Omega} \leqslant C(\sigma,p,\Omega,|\gamma|)\times \\ \left(\|\nabla u_1\|_{s,\Omega} + \|\nabla u_2\|_{s,\Omega}\right)^{\sigma-2}\|\nabla u\|^2_{2,\Omega} \leqslant b_2(t)Y(t),\ \sigma \leqslant \frac{2d}{d-s}\end{gathered} \tag{3.126}$$

мұндағы

$$b_2(t) := 2C(\sigma,p,\Omega,|\gamma|)\left(\|\nabla u_1\|_{s,\Omega} + \|\nabla u_2\|_{s,\Omega}\right)^{\sigma-2};$$

$$\sigma \leqslant \frac{2d}{d-s}\ (\sigma \leqslant \frac{2d}{d-p},\ \textit{егер } p > 2 \textit{ немесе } \sigma \leqslant \frac{2d}{d-2},\ \textit{егер } p < 2).$$

Ал F үшін (3.124) бағалауы орынды.

Алынған нәтижелерден (3.121) теңдікке, егер $\gamma \leqslant 0$ болғанда (3.123) және (3.124) өрнектерді, ал $\gamma > 0$ болғанда (3.124) және (3.126) өрнектерді қойсақ, онда төмендегі Коши есебі қорытылады

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) \leqslant a(t)y(t), \\ \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{3.127}$$

мұндағы

$$a(t) := b_1(t), \quad \textit{егер} \quad \gamma \leqslant 0;$$

$$a(t) := b_2(t), \quad \textit{егер} \quad \gamma > 0.$$

Сондай-ақ, $\gamma \leqslant 0$ *және* $\gamma > 0$ *жағдайда 3.7-теорема шарттарына байланысты* $a(t) \in L^1(0, T_{max})$, *мұндағы* T_{max} *мәні (3.11)-(3.14) есебінің әлсіз шешімінің бар болатын максималды уақыты. (3.127) дифференциалдық теңсіздіктен кез келген* $t \in [0, T_{max}]$ *үшін* $y(t) \equiv 0$ *болады, демек* $u_1 \equiv u_2$.

4 БІРТЕКТІ ЕМЕС СҰЙЫҚТАР ҮШІН КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕП

4.1. Есептің қойылымы

Бұл бөлімде эластикалық қасиеттерге ие біртекті емес сығылмайтын сұйықтықтардың қозғалысын сипаттайтын Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шеттік есеп қарастырылады

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{4.1}$$
$$(\rho\mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \kappa\,\Delta\mathbf{u}_t, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{4.2}$$
$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \rho \geqslant 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{4.3}$$
$$\rho\mathbf{u} = \rho_0\mathbf{u}_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \mathbf{x} \in \{0\}\times\Omega, \tag{4.4}$$
$$\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T, \tag{4.5}$$

мұндағы $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ шенелген облыс, ал $Q_T = (0, T)\times\Omega, 0 < T < \infty$ цилиндр және оның $\Gamma_T = (0, T)\times\partial\Omega$ бүйір беті болып табылады. Сонымен қатар, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d)$, ρ және p функциялары, сәйкесінше, физикалық тұрғыдан сұйықтықтың жылдамдығын, көлемдік күшті, сұйықтықтың тығыздығын және қысымын, ал μ және κ коэффициенттері, сәйкесінше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы мен релаксациясын сипаттайды және төмендегі шарттарды қанағаттандырады

$$\mu > 0, \quad \kappa > 0. \tag{4.6}$$

Қарастырылып отырған (4.1)-(4.5) есебінде $\mathbf{u}$, ρ және p ізделінді, ал $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}_0$ және ρ_0 белгілі функциялар. Бұл жұмыстағы алынған нәтижелер $d \geqslant 2$ жағдайы үшін орынды, алайда табиғаттағы сұйықтықтың қозғалысы үшін $d = 2,\ 3$ жағдайы жеткілікті.

Сондай-ақ, $\mathbf{m}_0$ импульстің бастапқы мәні және ол $\rho_0\mathbf{u}_0$ өрнегіне тең, ал $\mathbf{u}_0$ және ρ_0 мәндері

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4.7}$$
$$0 \leqslant \rho_0 \leqslant M < \infty, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{4.8}$$

шарттарын қанағаттандырады, мұндағы $\mathbf{u}_0$ бастапқы жылдамдық, M оң тұрақты. (4.8) шартты аңғарып қарасақ ρ_0 сұйықтықтың тығыздығы $\omega \subset\subset \Omega$ облыстарда нөлге барады, яғни бастапқы уақыт мезетінде кеңістік облыстың кейбір бөлігінде вакуум болады. (4.7) шартты келесі шарттардың біреуімен қоса анықтайық

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \tag{4.9}$$
$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega), \tag{4.10}$$

мұндағы $\mathbf{H}^2(\Omega)$ кеңістігі $\mathbf{W}^{2,2}(\Omega)$ түрдегі Соболев кеңістігі болып табылады және $\mathbf{V}$ кеңістігі анықтамасы (31) өрнекпен анықталған функционалдық кеңістік. Бұл жұмыста Монография [61,63]-дағы функционалдық кеңістіктердің анықтамалары мен белгілеулері қолданылады. Мәселен, берілген $m \in \mathbb{N}$ және $r \in [1, \infty]$ үшін $L^r(\Omega)$ және $W^{m,r}(\Omega)$ түрінде Лебег және Соболев кеңістіктері белгіленеді. Ал, $r = 2$ жағадайда $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ белгілеуі қоданылады. Сонымен қатар, $W_0^{m,r}(\Omega)$ арқылы $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігін $W^{m,r}(\Omega)$ кеңістігінің нормасы арқылы тұйықтағанда шығатын кеңістікті белгілейді. $W^{-m,r'}(\Omega)$ кеңістігі $W_0^{m,r}(\Omega)$ кеңістігіне түйіндес кеңістік, мұнда r' саны r санының Гелдер түйіндесі болып табылады.

Қарастырылып отырған есептің әлсіз шешімін зерттеуде (4.9) шарт жеткілікті, ал әлді шешім үшін (4.10) шартты қажет етеді. Олай болса, сәйкесінше $\mathbf{f}$ функциясы үшін де төмендегі екі ұйғарым қарастырылады

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{4.11}$$

$$\mathbf{f} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{4.12}$$

Егерде $(0, \infty)$ барлық уақыт аралығын қарастырмаған жағдайда $L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ үзіліссіз енгізуі орынды екені анық. Қарастырылып отырған бастапқы-шеттік есептің шешімі бар болуы және жалғыздығы үшін $\mathbf{f}$ функциясына (4.11) шарт қою жеткілікті саналады, алайда регуляр нетижелер үшін (4.12) шартты қою талап етіледі. (4.1)-(4.5) есебінің ізделінді әлді шешімінің анықтамасы келесі түрде беріледі.

Анықтама 4.1. *Айталық, $d \geqslant 2$ және (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалсын. (4.1)-(4.3) теңдеулердегі ρ, $\mathbf{u}$ мен p регуляр жалпылама функциялар болсын. Сондай-ақ, Q_T цилиндрінде барлық дерлік жерде ρ, $\mathbf{u}$ мен p функциялары (4.1)-(4.3) теңдеулерді, ал ρ мен $\mathbf{u}$ функциялары (4.4)-(4.5) бастапқы және шеттік шарттарды қанағаттандырсын. Онда $(\rho, \mathbf{u}, p)$ функциялар үштігі (4.1)-(4.5) есебінің әлді шешімі деп аталады.*

Бұл бөлімде негізінен (4.1)-(4.5) есебінің әлді шешімдерінің бар болуы туралы сұрақтарға жауап беріледі. Алғашқы нәтижелердің бірі төмендегі теоремада келтіріледі, сондай-ақ кеңістіктік облыстың шекарасына минималды шарттар қойылады.

Теорема 4.1. *Айталық, $2 \leqslant d \leqslant 4$ және Ω шенелген облыс, ал оның $\partial\Omega$ Липшиц үзіліссіз шекарасы болсын. Егер (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда (4.1)-(4.5) есебінің төмендегі шарттарды қанағаттандыратын кемінде бір $(\rho, \mathbf{u}, p)$ шешімі табылады*

1 $0 \leqslant \rho \leqslant M, (\mathbf{x}, t) \in Q_T$, *барлық* $q \geqslant 1$ *және* $\rho_t \in L^2(0, T; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))$ *үшін* $\rho \in C([0, T]; \mathbf{L}^q(\Omega))$;

2 $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}$ *және* $\sqrt{\rho}\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$;

3 $\mathbf{u}_t \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ *және* $\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$;

4 $p \in C_w([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$.

Егер (4.11) шарттың орнына (4.12) шартты қарастырған жағдайда, онда:

1 $\mathbf{u}_t \in L^\infty(0,T;\mathbf{V})$ *және* $\sqrt{\rho}\mathbf{u}_t \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *тұжырым орынды.*

Біртекті емес сұйықтықтардың қозғалысын сипаттайтын Навье-Стокс теңдеуі ((4.2) теңдеуде $\kappa\Delta\mathbf{u}_t$ мүшесі болмаған жағдайда) үшін $\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;\mathbf{V})$ немесе $\mathbf{u}_t \in L^\infty(0,T;\mathbf{V})$ дәлелдеуде (төменде (4.55) және (4.58) қараңыз) қосымша шарттарды қажет етеді. Осы нәтижені дәлелдеу үшін [18]-де келесі ұйғарымдарды қарастырады

$$\mathbf{f}_t \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{4.13}$$
$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)). \tag{4.14}$$

Алайда, (4.13)-(4.14) шарттармен қоса, $\mathbf{u}_0$ және ρ_0 бастапқы функцияларына Стокс есебінің үйлесімділік шарттары қойылған еді

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4.15}$$
$$-\mu\Delta\mathbf{u}_0 = \sqrt{\rho_0}\mathbf{g} - \nabla p_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4.16}$$
$$\mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{4.17}$$

мұндағы $p_0 \in H^1(\Omega)$ және $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. (4.13) шартқа қатысты ескеретін жәйт, $W^{1,2}(0,T) \hookrightarrow L^\infty(0,T)$ (қараңыз [91, VIII.7-теорема]) Соболев енгізуі бойынша $\mathbf{f}_t \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ (немесе $\mathbf{f} \in W^{1,2}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$) тұжырымы (4.11) шартының орнын баса алады. Жақын уақытта, біртекті емес Навье-Стокс теңдеуі үшін (4.15)-(4.17) үйлесімділік шарттарынан құтылуға болатын, алайда $a > 1$ және $q > 2$ үшін

$$\rho_0\overline{x}^a \in L^1(\Omega) \cap H^1(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega), \qquad \overline{x} := \sqrt{e+|x|^2}\log^2\left(e+|x|^2\right), \tag{4.18}$$

шарттары орынды болатын [92] жұмыста зерттелінді. Осындай нәтижелер бұл жұмыста біртекті емес Навье-Стокс-Фойгт есебі үшін $\mathbf{f}$ функциясына (4.13)-(4.14) ұйғарымдарын ескермей және (4.15)-(4.17) немесе (4.18) үйлесімділік шарттарынсыз регуляр нәтижелер алынды. Оған (4.2) теңдеудегі $\kappa\Delta\mathbf{u}_t$ релаксациялық мүше көмегін тигізді.

Регуляр шешім алуда жатық шекаралық облыс ғана емес кеңістіктің өлшемі де үлкен рөл атқарады. Сол мақсатта келесі теорема маңызды.

Теорема 4.2. *Айталық,* $2 \leqslant d \leqslant 3$ *болсын. Сондай-ақ,* Ω *шенелген облыс және оның* C^2 *кеңістікте жататын* $\partial\Omega$ *шекарасы болсын. Онда (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда (4.1)-(4.5) есебінің кемінде бір* $(\rho,\mathbf{u},p)$ *шешімі табылады және 4.1-теореманың (1)-(4) шарттарына қоса келесі шарттар орынды*

1 $D^2\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *және* $D^2\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$;

2 $\nabla p \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$;

егер (4.11) орнына (4.12) шартты қарастырсақ, 4.1-теореманың екінші бөлігіндегі (1) шартқа қоса төмендегі шарттар орынды

1 $D^2\mathbf{u}_t \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$*;*

2 $\nabla p \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$.

Біртекті емес Навье-Стокс теңдеуі үшін [18, 92]-де алынған регулярлықпен қорытынды нәтижелерді салыстырсақ, онда бұл жұмыста $D^2\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ және $D^2\mathbf{u}_t \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ регулярлығы (төменде(4.57) және (4.59) қараңыз) алынды, дегенмен де мұндай нәтижені (4.2) теңдеуде $\kappa\Delta\mathbf{u}_t$ мүшесі болмаған жағдайда алу мүмкін емес еді.

4.1 және 4.2-теоремаларының дәлелдеулері тұжырымдалады.

Ескерту 4.1. *Ескерер жәйт,* $D^2\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *және* $D^2\mathbf{u}_t \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ *регулярлығына қоса, төмендегі*

$$\mathbf{u},\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^\infty(0,T;C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})), \quad \text{егер} \quad 0<\alpha\leqslant 2-\frac{d}{2} \quad \text{және} \quad 2\leqslant d\leqslant 3.$$

регулярлығы орынды. Мұны (38) және (40) Соболев теңсіздіктерін жоғарыда айтылған регуляр нәтижелермен біріктіру арқылы алуға болады. Нақтырақ, төмендегі 4.4-ескертуді де қараңыз.

Келесі $(\rho,\mathbf{u},p)$ әлді шешімдердің бар болуының қосымша нәтижесі ретінде төмендегі теорема орынды, сонымен қатар бұл нәтижелер ρ және $\mathbf{u}$ шешімдерінің жалғыздығын дәлелдеуге мүмкіндік беретін шарттар тұжырымдалады, мұндағы 2^* саны 2 санының Соболев түйіндесін білдіреді.

Теорема 4.3. *Айталық,* $(\hat{\mathbf{u}},\hat{p},\hat{\rho})$ *және* $(\overline{\mathbf{u}},\overline{p},\overline{\rho})$ *функциялары (4.1)-(4.5) есептің және 4.2-теореманың шарттарын қанағаттандыратын шешімдер болсын. Егер*

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^{2^*}(\Omega), \tag{4.19}$$

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^{2^*}(\Omega)), \tag{4.20}$$

$$\rho_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \tag{4.21}$$

шарттары орындалса, онда $\hat{\rho}=\overline{\rho}$ *және* $\hat{\mathbf{u}}=\overline{\mathbf{u}}$.

[70, 4-5-теорема]-де есептің жалғыздығы $\rho_0>0$ жағдайда, сонымен бірге (4.21) және

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,r}(\Omega)\cap\mathbf{V}, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{f} \in L^2\left(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega)\right), \tag{4.23}$$

шарттарымен

$$d<r\leqslant 2^* \tag{4.24}$$

өлшем үшін дәлелденді. (4.24) шарттан $2\leqslant d\leqslant 3$ ұйғарымы орынды. Мұнымен қоса, (4.22) шарттың және $\mathbf{W}^{2,r}(\Omega)\hookrightarrow\mathbf{L}^{2^*}(\Omega), r\geqslant 2$ Соболев кеңістігінің үзіліссіз енгізуі көмегімен (4.19) шарттан құтылуға болады. Екінші жағынан, $r \leqslant 2^*$ үшін орынды $\mathbf{L}^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^r(\Omega)$ үзіліссіз енгізуіне байланысты (4.20) шартты қабылдасақ, онда (4.23) шарттан құтылуға болады.

4.2. Шешімнің бар болуы

(4.1)-(4.5) есебінің шешімінің бар болуын дәлелдеуі Галеркин жуықтауларына негізделеді. Төменде Ω облысының ішжиындар ұясын

$$\Omega_n := \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N} \right\}$$

және $\eta_n(x) := \frac{1}{n^d}\eta\left(\frac{x}{n}\right)$ Фридрихс өзегін қарастырайық. Сондай-ақ,

$$\eta_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp}\eta_n \subset B\,(0,n)\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \eta_n(x)\,dx = 1$$

болсын. Сонымен қатар, $\mathbf{u}_0$ және ρ_0 бастапқы берілгендері, сәйкесінше, $\mathbf{u}_{0,n}(x)$ және $\rho_{0,n}(x)$ орташалау функциялары арқылы регулярланады және ол келесі қатынаспен анықталады

$$\mathbf{u}_{0,n}(x) := (\eta_n \star \mathbf{u}_0)\,(x) = \int\limits_{\Omega} \eta_n(x-y)\mathbf{u}_0(y)\,dy, \quad x \in \Omega_n, \tag{4.25}$$

$$\rho_{0,n}(x) := (\eta_n \star \rho_0)\,(x) + \frac{1}{n} = \int\limits_{\Omega} \eta_n(x-y)\rho_0(y)\,dy + \frac{1}{n}, \quad x \in \Omega_n. \tag{4.26}$$

Бұрыннан белгілі $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ үшін оның $\mathbf{w}_n = \eta_n \star \mathbf{w}$ орташалау функциясы келесі шарттарды қанағаттандырады.

$$\mathbf{w}_n \in \mathbf{C}^\infty(\Omega_n), \qquad \mathbf{w}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{w},\ \ \Omega - \text{да барлық дерлік нүктеде}, \tag{4.27}$$

$$\mathbf{w}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{w},\ \mathbf{L}^p(\Omega)\text{-де}, \quad \mathbf{w} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{4.28}$$

Егер $\operatorname{supp}\eta_n \subset B\,(0,n)$ болса, онда келесі өрнек орынды

$$\operatorname{supp} u_{0,n} \subset \Omega_n + B\,(0,n)\,. \tag{4.29}$$

Сонымен қатар, (4.8), (4.25)-(4.26) және (4.27)-(4.28) өрнектерді ескере отырып төмендегі шарттар алынады

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \rho_{0,n} \leqslant \overline{M} := M + 1 < \infty, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4.30}$$

$$\|\mathbf{u}_{0,n}\|_{2,\Omega} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}\,. \tag{4.31}$$

Сонымен бірге, $\mathbf{u}_0$ функциясының жеткілікті регулярлығынан, келесі шарттар қорытылады

$$\|\nabla\mathbf{u}_{0,n}\|_{2,\Omega} \leqslant \|\nabla\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}\,, \qquad \left\|D^2\mathbf{u}_{0,n}\right\|_{2,\Omega} \leqslant \left\|D^2\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}\,. \tag{4.32}$$

Жеткілікті үлкен әрі еркін $n \in \mathbb{N}$ санын ескеріп төмендегі бастапқы-шеттік есепті қарастырайық

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{4.33}$$
$$(\rho \mathbf{u})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \kappa \Delta \mathbf{u}_t, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{4.34}$$
$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \tag{4.35}$$
$$\rho u = \rho_{0,n} \mathbf{u}_{0,n}, \quad \rho = \rho_{0,n}, \quad \mathbf{x} \in \{0\} \times \Omega, \tag{4.36}$$
$$\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma. \tag{4.37}$$

Галеркин сұлбасы арқылы (4.33)-(4.37) есептің шешімі ізделінеді. Стокс операторының инъективті, өз-өзіне түйіндес және компакттілі кері оператор ([93, 4.2-4-сөйлем] қараңыз) болғандығынан, оның λ_i оң меншікті мәндерінің тізбегі мен

$$\mathbb{A}(\boldsymbol{\psi}_i) = \lambda_i \boldsymbol{\psi}_i \tag{4.38}$$

шартты қанағаттандыратын $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}(\Omega)$ меншікті функциялары табылады. Олай болса, $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ жүйесін $\mathbf{H}(\Omega)$ кеңістігінде ортогоналдауға және $\mathbf{V}(\Omega)$ кеңістігінде ортонормалауға болады. Берілген $j \in \mathbb{N}$ үшін j- өлшемді және (4.38) өрнекпен анықталған $\boldsymbol{\psi}_j$, $j = 1, \ldots, n$ жүйесін қамтитын $\mathbf{X}^j$ кеңістігін қарастырайық. Барлық $j \in \mathbb{N}$ үшін [70, 1-теорема] ([94, 1-сөйлем] да қараңыз) дәлелдеуі секілді жуық шешімдердің

$$\mathbf{u}_n^j \in C^1([0, T); \mathbf{X}^j), \quad \mathbf{u}_n^j(x, t) = \sum_{i=1}^{j} c_i^j(t) \boldsymbol{\psi}_i(x), \quad \psi_i \in X^j, \tag{4.39}$$
$$\rho_n^j \in C^1([0, T); \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})) \tag{4.40}$$

бар екенін төмендегі $j + 1$ жәй дифференциалдық теңдеулер шешімі екенін көрсету арқылы дәлелдеуге болады

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho_n^j(t) \left[\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_n^j(t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_n^j(t) \right] \cdot \boldsymbol{\psi}_i \, dx + \kappa \int_\Omega \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} : \nabla \boldsymbol{\psi}_i \, dx \\ &+ \mu \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_n^j(t) : \nabla \boldsymbol{\psi}_i \, dx = \int_\Omega \rho_n^j(t) \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\psi}_i \, dx, \qquad i = 1, \ldots, j, \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial \rho_n^j}{\partial t} + \mathbf{u}_n^j \cdot \nabla \rho_n^j = 0, \tag{4.42}$$

(4.41)-(4.42) жүйе келесі бастапқы шарттармен үйлестіріледі

$$\rho_n^j \mathbf{u}_n^j = \rho_{0,n}^j \mathbf{u}_{0,n}^j, \quad \mathbf{u}_n^j = \mathbf{u}_{0,n}^j, \quad \rho_n^j = \rho_{0,n}^j, \quad \mathbf{x} \in \{0\} \times \Omega, \tag{4.43}$$

мұндағы $\mathbf{u}_{0,n}^j = P^j(\mathbf{u}_{0,n})$, ал P^j арқылы $P^j : V \longrightarrow X^j$ ортогональ проекцияны білдіреді, демек

$$\mathbf{u}_n^j(0, x) = \sum_{i=1}^{j} c_i^j(0) \boldsymbol{\psi}_i(x), \quad c_i^j(0) = c_{i,0}^j := (\mathbf{u}_{0,n}, \boldsymbol{\psi}_i), \quad i \in \{1, \ldots, j\}, \tag{4.44}$$

мұндағы $(\cdot,\cdot)$ өрнегі L^2- кеңістігіндегі скаляр көбейтінді. P^j бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан келесі ұйғарым орынды деуге болады

$$\mathbf{u}_{0,n}^j \xrightarrow[j\to\infty]{} \mathbf{u}_{0,n}, \quad \mathbf{x}\in \mathbf{L}^2(\Omega)\cap \mathbf{W}^{1,2}(\Omega). \tag{4.45}$$

Бастапқы тығыздықтың $\rho_{0,n}^j$ жуық мәні үшін төмендегі шарт орынды

$$\rho_{0,n}^j \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad \rho_{0,n}^j \xrightarrow[j\to\infty]{} \rho_{0,n},\ \mathbf{L}^p(\Omega)\text{-де}, \quad \forall\, p\in[1,\infty). \tag{4.46}$$

(4.30)-(4.32) және (4.45)-(4.46) өрнектерінен

$$\frac{1}{n} \leqslant \rho_{0,n}^j \leqslant \overline{M} < \infty, \quad \Omega\text{-да}, \tag{4.47}$$

$$\left\|\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega} \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}, \tag{4.48}$$

$$\left\|\nabla\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega} \leqslant \|\nabla\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}, \qquad \left\|D^2\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega} \leqslant \left\|D^2\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}. \tag{4.49}$$

тұжырымдарын алуға болады. (4.41) өрнектен $\mathbf{u}_n^j$ функциясының сызықтылығы және үзіліссіздігі әрі регулярлығынан $(0,T)$ аралығында жалпылама функция мағынасындағы келесі ұйғарым орынды

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \left[\rho_n^j(t)\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} + \rho_n^j(t)\left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n^j(t) - \mu\Delta\mathbf{u}_n^j(t) - \right.\\ \left.\kappa\frac{\partial\Delta\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{\psi}\,dx = \int\limits_\Omega \rho_n^j(t)\mathbf{f}(t)\boldsymbol{\psi}\,dx,\ \forall\,\boldsymbol{\psi}\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{V}\end{gathered} \tag{4.50}$$

Сондай-ақ, 6-лемма бойынша жалғыз түрде қысымның бар болуын дәлелдеуге болады

$$p_n^j \in C_w([0,T);\mathbf{L}^2(\Omega)), \qquad \int\limits_\Omega p_n^j(t)\,dx = 0, \tag{4.51}$$

демек,

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \left[\rho_n^j(t)\left(\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n^j(t)\right) - \mu\Delta\mathbf{u}_n^j(t) - \kappa\frac{\partial\Delta\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right]\boldsymbol{\psi}\,dx\\ -\int\limits_\Omega \rho_n^j(t)\mathbf{f}(t)\boldsymbol{\psi}\,dx = \int\limits_\Omega p^j(t)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi}\,dx, \qquad \forall\,\boldsymbol{\psi}\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)\end{gathered} \tag{4.52}$$

теңдігі $(0,T)$ аралығында барлық дерлік нүктеде орынды болады [70, 2-теорема].

Априорлық бағалаулар. Бұл бөлімде $\mathbf{u}_n^j$, ρ_n^j және p_n^j жуықтауларына $j-$ден тәуелсіз бағалаулар алынады, сондай-ақ $\mathbf{f}$ функциясына қатысты шарттарға қарай бірнеше сөйлемдер тұжырымдалады. Алынған априорлық бағалаулардың μ тұтқырлық және κ релаксация коэффициенттеріне тәуелді болуы (4.2) теңдеудегі $\mu\Delta\mathbf{u}$ және $\kappa\Delta\mathbf{u}_t$ қосылғыштарының маңызды екенін аңғартады. Сонымен қатар, априорлық бағалаулар $n-$нен де тәуелсіз екенін айта кету керек.

Сөйлем 4.1. *Айталық, $\mathbf{u}_n^j$, ρ_n^j және p_n^j функциялары (4.39), (4.40) және (4.51) өрнектерімен анықталған (4.33)-(4.37) есептің әлсіз жуық шешімдері болсын.*

1 *Егер (4.8) шарт орындалса, онда келесі бағалау орынды*

$$0<\frac{1}{n}\leqslant\inf_{x\in\overline{\Omega}}\rho_{0,n}^j(x)\leqslant\rho_n^j(x,t)\leqslant\sup_{x\in\overline{\Omega}}\rho_{0,n}^j(x)\leqslant\overline{M}<\infty,(x,t)\in Q_T. \quad (4.53)$$

2 *Егер $2\leqslant d\leqslant 4$ және (4.8), (4.9) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_1 саны табылып, келесі бағалауды қанағаттандырады*

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)}\left(\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2\right)+\\&\mu\int_0^T\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant K_1.\end{aligned} \quad (4.54)$$

3 *Егер $2\leqslant d\leqslant 4$ және (4.8), (4.9), (4.11) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_2 саны табылып, келесі бағалауды қанағаттандырады*

$$\int_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\frac{\partial\nabla\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2\right)dt\leqslant K_2. \quad (4.55)$$

4 *Егер $2\leqslant d\leqslant 3$ және (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_3 саны табылып, келесі бағалауды қанағаттандырады*

$$\kappa\sup_{t\in(0,T)}\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\mu\int_0^T\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant K_3. \quad (4.56)$$

5 *Егер $2\leqslant d\leqslant 3$ және (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_4 саны табылып, келесі бағалауды қанағаттандырады*

$$\kappa^2\int_0^T\left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant K_4. \quad (4.57)$$

Енді (4.11) ұйғарымының орнына (4.12) ұйғарымы ескеріліп, 4.1-сөйлемнің нәтижелерін жақсарту мақсатында бағалаулар тұжырымдалады.

Сөйлем 4.2. *Айталық, $\mathbf{u}_n^j$, ρ_n^j және p_n^j функциялары (4.39), (4.40) және (4.51) өрнектерімен анықталған (4.33)-(4.37) есептің әлсіз жуық шешімдері болсын.*

1 *Егер $2 \leqslant d \leqslant 4$ және (4.8), (4.9), (4.12) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_2' саны табылып, келесі бағалауды қанағаттандырады*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa \left\| \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 \right) \leqslant K_2'. \tag{4.58}$$

2 *Егер $2 \leqslant d \leqslant 3$ және (4.8), (4.10), (4.12) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_4' саны табылып, келесі бағалауды қанағаттандырады*

$$\kappa^2 \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial D^2 \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant K_4'. \tag{4.59}$$

Ең алдымен, 4.1 және 4.2-сөйлемдердің дәлелдеуіне кіріспес бұрын (4.2) теңдеуде $\kappa = 0$ жағдайда, яғни Навье-Стокс теңдеуі үшін алынған нәтижелерге талдау жасайық.

Ескерту 4.2. 1 Айта кету керек, (4.54) априорлық бағалауы [94, 4-лемма]-да алынған еді, алайда, бұл жұмыста авторлар $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ деген ғана шарт қойып отыр. Сондай-ақ, төмендегі (4.66) ((4.86) де қараңыз) априорлық бағалаудың көмегімен (4.54) өрнекте κ релаксация коэффициентін μ тұтқырлық коэффициентімен алмастыруға болатын көру оңай.

2 Ал, (4.56) априорлық бағалауы бастапқы тығыздықтың вакуум болуына немесе болмауына тәуелді емес. Әйтсе де, ρ_0 бастапқы тығыздықтың оң болғандағы нәтижелер [70, 3-теорема] мақалада басқа тәсіл арқылы дәлелденді. Сондай-ақ, төмендегі (4.86) априорлық бағалаудың көмегімен (4.56) өрнекте κ релаксация коэффициентін μ тұтқырлық коэффициентімен алмастыруға болатын көру оңай.

Дәлелдеуі 36. *(4.1-сөйлем) Дәлелдеуді жеңілдету мақсатында бірнеше тармақтарға бөлініп қарастырылады.*

1 *[70, 1-теорема] ([95, 1.2-лемма] да қараңыз) дәлелдеуін талдай отырып және (4.47) өрнекпен бірге максимум принципін қолданып (4.53) өрнек орындылығы дәлелденеді. Сондай-ақ, $\mathbf{u}_n^j$ соленоидылығын, $\mathbf{u}_n^j = 0, x \in \partial\Omega$ шартын (4.42) және (4.43)$_3$-пен бірге қолданып, барлық $t \geqslant 0$ және $1 \leqslant q \leqslant \infty$ үшін келесі өрнек тұжырымдалады*

$$\left\|\rho_n^j(t)\right\|_{q,\Omega}^q = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left\|\rho_n^j(s)\right\|_{q,\Omega}^q ds + \left\|\rho_{0,n}^j\right\|_{q,\Omega}^q =$$

$$-\int_0^t\int_\Omega \nabla\left(|\rho_n^j(s)|^q\right)\cdot \mathbf{u}_n^j(s)\,dxds+\left\|\rho_{0,n}^j\right\|_{q,\Omega}^q=\left\|\rho_{0,n}^j\right\|_{q,\Omega}^q. \tag{4.60}$$

2 *(4.50) өрнекті $\boldsymbol{\psi}=\mathbf{u}_n^j(t)$-ға көбейтіп, шыққан нәтижені 0 мен $t\in(0,T)$ аралығында интегралдап, (4.42) үзіліссіздік теңдеуі мен $\mathbf{u}_n^j$ соленоидылығын ескеріп, (4.43) бастапқы шартты қолдансақ, онда төмендегі теңдік қорытылады*

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{\kappa}{2}\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\mu\int_0^t\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds=\\ \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho_{0,n}^j}\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{\kappa}{2}\left\|\nabla\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2+\int_0^t\int_\Omega\rho_n^j(s)\mathbf{f}(s)\mathbf{u}_n^j(s)dxds\end{gathered}\tag{4.61}$$

Енді (4.61) өрнектегі соңғы қосылғышты Гельдер және Коши теңсіздіктерін қолданып бағаласақ, онда келесі теңсіздік алынады

$$\begin{gathered}\int_0^t\int_\Omega\rho_n^j(s)\mathbf{f}(s)\mathbf{u}_n^j(s)dxds\leqslant\\ \frac{1}{4}\int_0^t\left\|\sqrt{\rho_n^j(s)}\mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+\int_0^t\left\|\sqrt{\rho_n^j(s)}\mathbf{f}(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds.\end{gathered}\tag{4.62}$$

Сөйтіп, (4.62) теңсіздікті (4.61) теңдікке ескеріп және (4.47)-(4.48), $(4.49)_1$ өрнектерімен бірге (4.53) шартты қолдансақ, онда

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{\kappa}{2}\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\mu\int_0^t\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds\leqslant\\ \frac{\overline{M}}{2}\left\|\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{\kappa}{2}\left\|\nabla\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|\sqrt{\rho_n^j(s)}\mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+\overline{M}\int_0^t\left\|\mathbf{f}(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds\end{gathered}$$

теңсіздігі тұжырымдалады. Оған Гронуолл теңсіздігін қолданып және $t\in(0,T)$ бойынша супремум алсақ, онда $K_1=C\left(\overline{M},\kappa,\left\|\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega},\left\|\nabla\mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega},\left\|\mathbf{f}\right\|_{L^2(Q_T)},T\right)$ оң тұрақтысы үшін (4.54) бағалауы қорытылады.

3 *Келесі (4.50) өрнекті* $\boldsymbol{\psi} = \frac{\partial u_n^j(t)}{\partial t}$ *функциясын көбейтсек, онда*

$$\begin{aligned}&\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa\left\|\frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 = \\ &J(t) + \int\limits_\Omega \rho_n^j(t)\mathbf{f}(t)\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\,dx,\end{aligned} \tag{4.63}$$

теңдігі алынады, мұндағы

$$J(t) := -\int\limits_\Omega \rho_n^j(t)\left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}dx.$$

Олай болса, (4.63) өрнектегі соңғы қосылғышты (4.62) теңдік секілді бағалағанда, онда төмендегі теңсіздік шығады

$$\int\limits_\Omega \rho_n^j(t)\mathbf{f}(t)\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}dx \leqslant \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\mathbf{f}(t)\right\|_{2,\Omega}^2. \tag{4.64}$$

Сондай-ақ, $J(t)$ *функционалын бағалау үшін (4.53) өрнек пен Коши және Гельдер теңсіздіктерін бірге қолдансақ, онда*

$$\begin{aligned}|J(t)| \leqslant&\overline{M}\left\|\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{d,\Omega}\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}\left\|\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2^*,\Omega}, 2 \leqslant d \leqslant 4\\ \leqslant&C_1\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2\left\|\frac{\partial \nabla\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}\\ \leqslant&\frac{\kappa}{2}\left\|\frac{\partial \nabla\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 + C_2\left(\sup_{t\in(0,T)}\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2\right)^2\end{aligned} \tag{4.65}$$

теңсіздігі шығады, мұндағы $C_1 = C(d,\overline{M},\Omega)$ *және* $C_2 = C(\overline{M},\kappa,d,\Omega)$ *оң тұрақтылар. Мұнан әрі (4.64) және (4.65) бағалауларды (4.63) өрнекке қойып, шыққан нәтижені* 0 *мен* $t\in(0,T)$ *аралығында интегралдап, сондай-ақ, (4.43) бастапқы шарт пен (4.54) бағалауды ескерсек, онда*

$$\begin{aligned}&\mu\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int\limits_0^t\left(\left\|\sqrt{\rho_n^j(s)}\frac{\partial \mathbf{u}_n^j}{\partial s}(s)\right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa\left\|\frac{\partial\nabla\mathbf{u}_n^j(s)}{\partial s}\right\|_{2,\Omega}^2\right)ds \leqslant\\ &\mu\left\|\nabla\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + C,\end{aligned}$$

бағалауы алынады, мұндағы $C = C(\overline{M},\kappa,d,K_1,\Omega,T)$ *оң тұрақты. Соңғы бағалауды* $(0,T)$ *бойынша супремумдап және* $(4.49)_1$*-ді ескерсек, онда*

$$\int_0^T \left(\left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa \left\| \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega)}^2 \right) dt + \mu \sup_{t\in(0,T)} \left\| \nabla \mathbf{u}_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant K_2 \tag{4.66}$$

бағалауы қорытылады, мұндағы $K_2 = C\left(\overline{M}, \mu, \kappa, d, \|\mathbf{f}\|_{L^2(Q_T)}, \Omega, T, K_1\right)$ *оң тұрақты. Сонымен бірге, (4.54) өрнекті ескерсек, онда (4.66) бағалаудан (4.55) бағалауы тұжырымдалады.*

4 *Енді (4.50) теңдікті* $\boldsymbol{\psi} = \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))$*-ға көбейтсек, онда*

$$-\kappa \int_\Omega \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\, dx - \mu \int_\Omega \Delta \mathbf{u}_n^j(t) \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\, dx = \int_\Omega \rho_n^j(t) \mathbf{f}(t) \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\, dx - \int_\Omega \rho_n^j(t) \left[\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right) \mathbf{u}_n^j(t) \right] \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\, dx. \tag{4.67}$$

теңдігі алынады, мұндағы $\mathbb{A}$ *бейнелеуі (41) өрнекпен анықталған Стокс операторы. Егер (4.39) түріндегі* $\mathbf{u}_n^j$ *фукнциясын ескеріп, (45) және (4.38) өрнектерімен бірге (41) Стокс операторының сызықтылығын қолдансақ, онда төмендегі өрнек алынады*

$$-\kappa \int_\Omega \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \cdot \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\, dx = \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))|^2\, dx,$$

$$-\mu \int_\Omega \Delta \mathbf{u}_n^j(t) \cdot \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\, dx = \mu \int_\Omega |\mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))|^2\, dx.$$

Соңғы теңдіктердің көмегімен (4.67) өрнекке ауыстыру жасағанда, келесі теңдік алынады

$$\frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t)) \right\|_{2,\Omega}^2 + \mu \left\| \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t)) \right\|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega \rho_n^j(t) \left[\mathbf{f}(t) - \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} - \left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right) \mathbf{u}_n^j(t) \right] \cdot \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\, dx. \tag{4.68}$$

Мұнан кейін Гелдер, Коши және Минковский теңсіздіктерін (4.53) өрнекпен бірге қолдансақ, онда

$$\kappa \frac{d}{dt} \left\| \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t)) \right\|_{2,\Omega}^2 + \mu \left\| \mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t)) \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant C \left(\|\mathbf{f}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \int_\Omega |\mathbf{u}_n^j(t)|^2 |\nabla \mathbf{u}_n^j(t)|^2 dx \right) \tag{4.69}$$

теңсіздігі шығады, мұндағы $C = C(\mu, \overline{M})$. Алынған теңсізідікті 0 мен $t \in (0, T)$ аралығында интегралдап және $(0, T)$ бойынша супремум алғанда келесі теңсіздік қорытылады

$$\kappa \sup_{t\in(0,T)} \left\|\mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\right\|_{2,\Omega}^2 + \mu \int_0^T \left\|\mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(s))\right\|_{2,\Omega}^2 ds \leqslant \kappa \left\|\mathbb{A}(\mathbf{u}_{0,n}^j)\right\|_{2,\Omega}^2 + C \int_0^T \left(\|\mathbf{f}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 + \int_\Omega |\mathbf{u}_n^j|^2 |\nabla \mathbf{u}_n^j|^2 dx \right) dt. \tag{4.70}$$

Енді, (48) өрнекті (38), (41) және (4.44) өрнектерімен бірге ескерсек, онда келесі нәтижені тұжырымдауға болады

$$\left\|D^2(\mathbf{u}_n^j(t))\right\|_{2,\Omega} \leqslant C_1 \left\|\mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\right\|_{2,\Omega}^2, \tag{4.71}$$

$$\left\|\mathbb{A}(\mathbf{u}_{0,n}^j)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant C_2 \left\|\Delta \mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant C_3 \left\|D^2 \mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2 \tag{4.72}$$

мұндағы $C_1 = C(\mu, \Omega)$, $C_2 = C(\mu)$ және $C_3 = C(\mu, d)$ оң тұрақтылар. Айта кету керек, (4.72) теңсіздікте $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}$ ((4.38) қараңыз) меншікті функциялар үшін $\mathbb{P}$ Лере проекциясы мен Лаплас операторының арасындағы байланыс қолданылды, сондай-ақ, $\mathbb{P}$ симметриялығын пайдаланып Лаплас операторы үшін де (4.38) өрнекті дәлелдеуге болады. Олай болса, (4.71)-(4.72) теңсіздіктерді (4.70) өрнекке қолданғанда, онда

$$\kappa \sup_{t\in(0,T)} \left\|D^2 \mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \mu \int_0^T \left\|D^2 \mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds \leqslant C \left(\left\|D^2 \mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \left(\|\mathbf{f}(s)\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\sqrt{\rho_n^j(s)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(s)}{\partial s}\right\|_{2,\Omega}^2 + \int_\Omega |\mathbf{u}_n^j(s)|^2 |\nabla u_n^j(s)|^2 dx \right) ds \right) \tag{4.73}$$

теңсіздігі алынады, мұндағы $C = C(\mu, \kappa, \overline{M}, d, \Omega)$. Екінші жағынан, Гельдер, Коши және (32)-(33), (37) Соболев теңсіздіктерінің көмегімен

$$\int_0^T \int_\Omega |\mathbf{u}_n^j(s)|^2 |\nabla \mathbf{u}_n^j(s)|^2 dx ds \leqslant$$

$$\int_0^T \|\mathbf{u}_n^j(t)\|_{2^*,\Omega} \|\mathbf{u}_n^j(t)\|_{q,\Omega} \|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega} \|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2^*,\Omega} dt$$

$$\left(\frac{1}{2^*}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^*}=1\Leftrightarrow q=\frac{2d}{4-d},\quad 2\leqslant d\leqslant 3\right)$$

$$\leqslant C_1\sup_{t\in(0,T)}\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega}^2\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega}\|D^2\mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega}ds$$

$$\leqslant C_2\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega}\|D^2\mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega}ds$$

$$\leqslant C_3\int_0^t\|\nabla\mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega}^2ds+\frac{\mu}{2C}\int_0^t\|D^2\mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega}^2ds, \tag{4.74}$$

теңсіздігі қорытылады, мұндағы $C_1=C(d,\Omega)$, $C_2=C(\kappa,d,\Omega,K_1)$, $C_3=C(\mu,\kappa,\overline{M},d,\Omega,K_1)$ *оң тұрақтылар, ал* C *тұрақтысы (4.73) өрнектен белгілі оң сан. Егер (4.74) теңсіздікті (4.73) өрнекке қойып және* $(4.49)_2$ *шартты қолданып, соңымен қатар (4.54) және (4.55) бағалауларды ескерсек, онда* $K_3=C(\mu,\kappa,\overline{M},d,\Omega,\left\|D^2\mathbf{u}_0\right\|_{L^2(\Omega)},\|\mathbf{f}\|_{L^2(Q_T)},K_1,K_2)$ *оң тұрақтысы үшін (4.56) бағалауы тұжырымдалады.*

5 *Бұл жағдайда, Гельдер және Коши теңсіздіктерін (4.53) өрнекпен бірге пайдаланып, (4.63) өрнектің оң жағын бағаласақ, онда*

$$\int_\Omega\rho_n^j(t)\mathbf{f}(t)\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}dx\leqslant\frac{1}{4}\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\mathbf{f}(t)\right\|_{2,\Omega}^2, \tag{4.75}$$

$$|J(t)|\leqslant\frac{1}{4}\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\overline{M}\int_\Omega|u_n^j(t)|^2|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)|^2dx \tag{4.76}$$

теңсіздіктері шығады. Соңғы (4.75) және (4.76) теңсіздіктерді (4.63) өрнекке ескеріп, сондай-ақ, 0 *мен* $t\in(0,T)$ *аралығында интегралдасақ, онда келесі теңсіздік қорытылдады*

$$\begin{gathered}\mu\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\int_0^t\left(\left\|\sqrt{\rho_n^j(s)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j}{\partial s}(s)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\frac{\partial\nabla u_n^j(s)}{\partial s}\right\|_{2,\Omega}^2\right)ds\leqslant\\ \mu\left\|\nabla\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2+2\int_0^t\|\mathbf{f}(s)\|_{2,\Omega}^2\,ds+2\overline{M}\int_0^t\int_\Omega|\mathbf{u}_n^j(s)|^2|\nabla\mathbf{u}_n^j(s)|^2dxds.\end{gathered} \tag{4.77}$$

Екінші жағынан, $\partial\Omega\in C^2$ *болғандықтан, 7-лемманы пайдаланып, келесі Стокс есебінің әлсіз шешімдері, яғни* $(\mathbf{w},p)$: $\mathbf{w}\in\mathbf{H}^2(\Omega)$ *және* $p\in H^1(\Omega)$, $\int_\Omega p(x)dx=0$ *жалғыз түрде табылатын дәлелдеуге болады*

$$\operatorname{div}\mathbf{w}=0,\mathbf{x}\in\Omega, \tag{4.78}$$

$$-\mu\Delta\mathbf{w}+\nabla p=\rho_n^j(t)\left[\mathbf{f}(t)-\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}+\left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n^j(t)\right],\mathbf{x}\in\Omega, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{w}=0,\ \mathbf{x}\in\partial\Omega. \quad (4.80)$$

Сондай-ақ, $C_2=C(\mu,\Omega)$ оң тұрақтысы үшін келесі теңсіздік орынды

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}+\|p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\leqslant C_2\left\|\rho_n^j(t)\left[\mathbf{f}(t)-\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}+\left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n^j(t)\right]\right\|_{2,\Omega}. \quad (4.81)$$

Ескерер жәйт, кез келген $t\in(0,T)$ үшін $\sigma=\frac{\kappa}{\mu}$ мәнімен бірге $\mathbf{w}=\mathbf{u}_n^j(t)+\sigma\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}$ және $p=p_n^j(t)$ функциялары (4.78)-(4.80) Стокс есебін қанағаттандырады, демек, (4.81) өрнектен келесі бағалау алынады

$$\mu^2\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\mu\kappa\frac{d}{dt}\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa^2\left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2\leqslant C_3\times$$
$$\left(\overline{M}\left\|\mathbf{f}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\overline{M}\int\limits_\Omega|\mathbf{u}_n^j(t)|^2|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)|^2dx\right), \quad (4.82)$$

мұндағы $C_3=C(\mu,\overline{M},\Omega)$ оң тұрақты. Соңғы өрнекті 0 мен $t\in(0,T)$ аралығында интегралдап және (4.43) бастапқы шартты ескереск, онда

$$\mu^2\int\limits_0^t\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+\mu\kappa\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa^2\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(s)}{\partial s}\right\|_{2,\Omega}^2ds$$
$$\leqslant\mu\kappa\left\|D^2\mathbf{u}_{0,n}^j\right\|_{2,\Omega}^2+C_3\left(\overline{M}\int\limits_0^t\left\|\mathbf{f}(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+\right. \quad (4.83)$$
$$\left.\int\limits_0^t\left\|\sqrt{\rho_n^j(s)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j}{\partial s}(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+\overline{M}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega|\mathbf{u}_n^j(s)|^2|\nabla\mathbf{u}_n^j(s)|^2dxds\right).$$

теңсіздігі тұжырымдалады. Жеткілікті аз $\delta>0$ саны $C_3\delta<\frac{1}{2}$ теңсіздікті қанағаттандырса, онда (4.77) және (4.83) теңсіздіктерінен

$$\int\limits_0^t\left(\frac{1}{2}\left\|\sqrt{\rho_n^j(s)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j}{\partial s}(s)\right\|_{2,\Omega}^2+2\kappa\left\|\frac{\partial\nabla\mathbf{u}_n^j(s)}{\partial s}\right\|_{2,\Omega}^2\right)ds+\mu\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+$$

$$\delta\left(\mu^2\int\limits_0^t\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2ds+\mu\kappa\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa^2\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(s)}{\partial s}\right\|_{2,\Omega}^2ds\right)\leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mu \left\|\nabla \mathbf{u}_{0,n}^{j}\right\|_{2,\Omega}^{2} + \delta\mu\kappa \left\|D^{2}\mathbf{u}_{0,n}^{j}\right\|_{2,\Omega}^{2} + \\
&C_4 \int\limits_0^t \|\mathbf{f}(s)\|_{2,\Omega}^{2} \, ds + C_5 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\mathbf{u}_n^j(s)|^2 |\nabla \mathbf{u}_n^j(s)|^2 dx ds
\end{aligned} \tag{4.84}
$$

теңсіздігі шығады, мұндағы $C_4 = C(\overline{M})$ *және* $C_5 = C(\overline{M})$ *оң тұрақтылар. Жоғарыдағы теңсіздікте соңғы қосылғыш (4.74) өрнек секілді бағаланады, бірақ жеткілікті аз* δ *саны үшін Коши теңсіздігінің соңғы бөлігі қолданылады, демек,*

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\mathbf{u}_n^j(s)|^2 |\nabla \mathbf{u}_n^j(s)|^2 dx ds \leqslant C_6 \int\limits_0^t \|\nabla \mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega} \|D^2 \mathbf{u}_n^j(s)\|_{2,\Omega} ds \\
&\leqslant C_6 \left(\frac{2C_7\mu^2}{\delta} \int\limits_0^t \left\|\nabla \mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds + \frac{\delta\mu^2}{2C_7} \int\limits_0^t \left\|D^2 \mathbf{u}_n^j(s)\right\|_{2,\Omega}^2 ds \right),
\end{aligned} \tag{4.85}
$$

мұндағы $C_6 = \frac{C_2}{\mu}$ *және* $C_7 = C_6 C_5$*, ал* C_2 *мен* C_5 *тұрақтылары, сәйкесінше, (4.74) және (4.84) өрнектерден белгілі. (4.85) теңсіздікті (4.84) өрнекке ескеріп, жоғарыдағы шарттар үшін* δ *санын таңдап, алынған теңсіздіктен* $(0, T)$ *бойынша супремумдап және(4.49) бастапқы шарт пен қайтадан (4.54) бағалауды қолдансақ, төмендегі бағалау тұжырымдалады*

$$
\begin{aligned}
&\mu \sup_{t\in(0,T)} \left(\left\|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa \left\|D^2 \mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \right) \\
&+ \int\limits_0^T \left(\left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa \left\| \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 \right) dt \\
&+ \mu^2 \int\limits_0^T \left\|D^2 \mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 dt + \kappa^2 \int\limits_0^T \left\| \frac{\partial D^2 \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 dt \leqslant K_4,
\end{aligned} \tag{4.86}
$$

мұндағы $K_4 = C\left(\overline{M}, \mu, \kappa, d, \Omega, \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}, \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}, \left\|D^2 \mathbf{u}_0\right\|_{2,\Omega}, \|\mathbf{f}\|_{L^2(Q_T)}, K_1\right)$ *оң тұрақты. Егер (4.54), (4.55) және (4.56) бағалауларды ескере отырып, (4.86) бағалаудан қажетті нәтиже (4.57) бағалау алынады.*

Ескерту 4.3. (4.57) бағалауды және (4.56) бағалаудың тармағын басқа жолмен де алуға болады. Ол үшін (4.50) теңдікті $\boldsymbol{\psi} = \mathbb{A}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right)$-ға көбейтсек, онда төмендегі теңдік шығады

$$\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\mathbb{A}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right)\right\|_{2,\Omega}^2= \\ \int\limits_{\Omega}\rho_n^j(t)\left[\mathbf{f}(t)-\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}-\left(\mathbf{u}_n^j(t)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n^j(t)\right]\cdot\mathbb{A}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right)dx. \tag{4.87}$$

мұндағы $\mathbb{A}$ бейнелеуі (41) өрнектен белгілі Стокс операторы. Егер (4.70) өрнек үшін алынған нәтижелерді қайталасақ, онда төмендегі теңсіздік алынады

$$\frac{\mu}{2}\sup_{t\in(0,T)}\left\|\mathbb{A}(\mathbf{u}_n^j(t))\right\|_{2,\Omega}^2+\frac{\kappa}{2}\int\limits_0^T\left\|\mathbb{A}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right)\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant \\ C\left(\left\|A(\mathbf{u}_{0,n}^j)\right\|_{2,\Omega}^2+\int\limits_0^T\|\mathbf{f}(t)\|_{2,\Omega}^2\,dt+\int\limits_0^T\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial u_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2dt+\right. \\ \left.\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}_n^j|^2|\nabla u_n^j|^2dxdt\right), \tag{4.88}$$

мұндағы $C=C(\kappa)$ оң тұрақты. Олай болса, (4.71)-(4.72) және

$$\left\|D^2\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right)\right\|_{2,\Omega}\leqslant C(\mu,\Omega)\left\|\mathbb{A}\left(\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right)\right\|_{2,\Omega}^2,$$

теңсіздіктерді қолдансақ, онда келесі теңсіздік тұжырымдалады

$$\mu\sup_{t\in(0,T)}\left\|D^2\left(\mathbf{u}_n^j(t)\right)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\int\limits_0^T\left\|\frac{\partial D^2\left(\mathbf{u}_n^j(t)\right)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant \\ C\left(\left\|D^2(\mathbf{u}_{0,n}^j)\right\|_{2,\Omega}^2+\int\limits_0^T\|\mathbf{f}(t)\|_{2,\Omega}^2\,dt+\right. \\ \left.\int\limits_0^T\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2dt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\mathbf{u}_n^j(t)|^2|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)|^2dxdt\right). \tag{4.89}$$

Жоғарыдағы теңсіздікте соңғы қосылғышты бағалау үшін (4.74) өрнектен өзгеше түрде төмендегідей бағалау алынады

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\mathbf{u}_n^j(t)|^2 |\nabla \mathbf{u}_n^j(t)|^2 dxdt \leqslant \\
&C_1 \sup_{t\in(0,T)} \|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega}^2 \int\limits_0^T \|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega} \|D^2 \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega} dt \leqslant \\
&C_2 \left(\int\limits_0^T \|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega}^2 dt + \frac{\mu}{2CC_2T} \int\limits_0^T \|D^2 \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega}^2 dt \right) \leqslant \\
&C_2 \int\limits_0^T \|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega}^2 dt + \frac{\mu}{2C} \sup_{t\in(0,T)} \|D^2 \mathbf{u}_n^j(t)\|_{2,\Omega}^2,
\end{aligned} \tag{4.90}$$

мұндағы $C_1 = C(d,\Omega)$, $C_2 = C(\mu, d, \Omega, T, K_1)$ оң тұрақтылар және C тұрақтысы (4.89) өрнектен белгілі оң сан. (4.90) теңсіздікті (4.89) өрнекке қойып, сонымен қатар $(4.49)_2$ бастапқы шарт пен (4.54) және (4.55) бағалар-ларды пайдалансақ, онда келесі бағалау тұжырымдалады

$$\mu \sup_{t\in(0,T)} \left\|D^2 \mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa \int\limits_0^T \left\| \frac{\partial D^2 \left(\mathbf{u}_n^j(t)\right)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 dt \leqslant K, \tag{4.91}$$

мұндағы $K = C(\mu, \overline{M}, d, \Omega, T, \left\|D^2 \mathbf{u}_0\right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \|\mathbf{f}\|_{L^2(Q_T)}, K_1, K_2)$ оң тұрақты. Қорыта айтқанда, (4.91) өрнектен (4.57) бағалау алынады.

Алайда (4.58) және (4.59) бағалауды дәлелдеуге кіріспестен бұрын, айта кету керек, (4.57) бағалауды тұжырымдау мақсатында 4.3-ескертуде тура әдіс арқылы алынған (4.91) бағалаудың 4.1-сөйлемді дәлелдеуде алынған (4.86) өрнектен ерекшелігі дәлелдеу барысында кейбір ақпаратты жоғалтумыз мүмкін. Сонымен қатар, 4.1-сөйлемнің дәлелдеу жолы (4.59) бағалауды алуда үлкен ықпалын тигізеді.

Дәлелдеуі 37. *(4.2-сөйлем) Дәлелдеу екі кезеңнен тұрады.*

1 (4.63) теңдікті келесі түрде қайта жазайық

$$\begin{aligned}
&\left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa \left\| \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 = \\
&-\mu \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u}_n^j(t) : \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} dx + J(t) + \int\limits_\Omega \rho_n^j(t) \mathbf{f}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} dx.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Сөйтіп, (4.65) үшін алынған бағалау секілді есептеулер жасасақ

$$|J(t)| \leqslant \frac{\kappa}{4} \left\| \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + C \left(\sup_{t\in(0,T)} \left\|\nabla \mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \right)^2, \tag{4.93}$$

мұндағы $C = C(\overline{M}, \kappa, d, \Omega)$ оң тұрақты. Коши теңсіздігінен келесі тұжырым қорытылады

$$\left| -\mu \int\limits_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_n^j(t) : \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\, dx \right| \leqslant \frac{\kappa}{4} \left\| \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\mu^2}{\kappa} \left\| \nabla \mathbf{u}_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 . \quad (4.94)$$

(4.64) және (4.93)-(4.94) теңсіздіктерді (4.92) өрнекке ескерсек, онда

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\kappa}{2} \left\| \frac{\partial \nabla \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \\ \frac{\mu^2}{\kappa} \left\| \nabla \mathbf{u}_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + C \left(\sup_{t\in(0,T)} \left\| \nabla \mathbf{u}_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \mathbf{f}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 . \end{gathered} \quad (4.95)$$

теңсіздігі алынады. Мұнан әрі қарай $(0, T)$ бойынша (4.95) теңсіздіктен супремум алып, (4.12) ұйғарымды және (4.53), (4.54) бағалауларды ескерсек, онда $K_2' = C\left(\overline{M}, \mu, \kappa, d, \Omega, \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}, K_1\right)$ оң тұрақтысы үшін (4.58) бағалауы тұжырымдалады.

2 Бұл жағдайды дәлелдеуге (4.82) өрнекті келесі түрде қайта жазайық

$$\begin{gathered} \mu^2 \left\| D^2 \mathbf{u}_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa^2 \left\| \frac{\partial D^2 \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \\ - 2\mu\kappa \int\limits_{\Omega} D^2 \mathbf{u}_n^j(t) : \frac{\partial D^2 \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\, dx + C_3 \left(\overline{M} \left\| \mathbf{f}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\ \left. \left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \overline{M} \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}_n^j(t)|^2 |\nabla \mathbf{u}_n^j(t)|^2 dx \right) . \end{gathered} \quad (4.96)$$

Сөйтіп, (4.74) өрнекке алынған бағалау секілді есептеулер жасасақ, онда

$$\begin{gathered} \kappa^2 \left\| \frac{\partial D^2 \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant C_4 \left(\left\| \mathbf{f}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \\ \left. \left\| \sqrt{\rho_n^j(t)} \frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \nabla \mathbf{u}_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| D^2 \mathbf{u}_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \right) \end{gathered} \quad (4.97)$$

теңсіздігі қорытылады, мұндағы $C_4 = C(\mu, \kappa, \overline{M}, d, \Omega, K_1)$ оң тұрақты.

Сондай-ақ,(4.97) өрнектен $(0, T)$ бойынша супремумдап, (4.12) шартпен (4.53), (4.54), (4.56) және (4.58) бағалауларды бірге қолдансақ, онда $K_4' = C(\mu, \kappa, M^*, d, \Omega, K_1, K_3, K_2')$ оң тұрақтысы үшін (4.59) бағалауы шығады.

Сөйлем 4.3. *Айталық, $2 \leqslant d \leqslant 3$ және $\mathbf{u}_n^j$, ρ_n^j және p_n^j функциялары, сәйкесінше, (4.39), (4.40) және (4.51) өрнектермен анықталған (4.33)-(4.37) есептің әлсіз жуық шешімдері болсын.*

1 *Егер (4.8), (4.9), (4.11) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_5 оң тұрақтысы табылып және ол төмендегі бағалауды қанағаттандырады*

$$\int\limits_0^T \left\|\nabla p_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 dt \leqslant K_5 \tag{4.98}$$

2 *Егер (4.8), (4.9), (4.12) шарттар орындалса, онда $j-$ден (және $n-$нен) тәуелсіз K_6 оң тұрақтысы табылып және ол төмендегі бағалауды қанағаттандырады*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\nabla p_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant K_6. \tag{4.99}$$

Дәлелдеуі 38. *1 Кішкене артқа көз салып, (4.78)-(4.80) Стокс есебі және онымен байланысты (4.81) регулярлылықты еске түсірейік. Сонымен қатар, (4.82), (4.81) өрнектерден келесі теңсіздік қорытылады*

$$\begin{aligned}&\mu^2\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\mu\kappa\frac{d}{dt}\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa^2\left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\\&\left\|\nabla p_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2\leqslant C_3\Bigg(\|\mathbf{f}(t)\|_{2,\Omega}^2+\\&\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\int\limits_\Omega|\mathbf{u}_n^j(t)|^2|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)|^2dx\Bigg)\end{aligned} \tag{4.100}$$

мұндағы $C_3=C(\mu,\overline{M},\Omega)$ оң тұрақты. Сөйтіп, (4.86) өрнек үшін алынған бағалаулар секілді есептеулер жасасақ, онда

$$\begin{aligned}&\mu\sup_{t\in(0,T)}\left(\left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2\right)+\\&\int\limits_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\frac{\partial\nabla\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2\right)dt\\&+\mu^2\int\limits_0^T\left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2dt+\kappa^2\int\limits_0^T\left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2dt+\\&\int\limits_0^T\left\|\nabla p_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant K_4,\end{aligned} \tag{4.101}$$

бағалауы қорытылады, мұндағы K_4 оң тұрақты. Сондай-ақ, (4.101) өрнектен (4.98) бағалау алынады, мұндағы $K_5=K_4$, ал K_4 тұрақтысы (4.57) өрнекпен берілген.

2 *Бұл жағдайда, (4.96) өрнекке ұқсас түрде (4.100) өрнекті қайта жасасақ, онда келесі теңсіздік тұжырымдалады*

$$\mu^2 \left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \kappa^2 \left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\nabla p_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant$$
$$- 2\mu\kappa \int\limits_{\Omega} D^2\mathbf{u}_n^j(t) : \frac{\partial D^2\mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\, dx + C_3 \Big(\|\mathbf{f}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \tag{4.102}$$
$$\left.\left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 + \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}_n^j(t)|^2|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)|^2 dx \right).$$

Енді (4.102) өрнекті ескеріп, (4.97) үшін алынған бағалау секілді есептеулер жасасақ, онда төмендегі теңсіздік қорытылады

$$\left\|\nabla p_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant C_4 \left(\|\mathbf{f}(t)\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\sqrt{\rho_n^j(t)}\frac{\partial \mathbf{u}_n^j(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2 + \right. \tag{4.103}$$
$$\left. \left\|\nabla\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|D^2\mathbf{u}_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 \right)$$

мұндағы $C_4 = C(\mu, \kappa, \overline{M}, d, \Omega, K_1)$ оң тұрақты.

Қорыта айтқанда, (4.59) бағалау (4.97) *өрнектің салдары болып табылады, сондай-ақ, (4.103) өрнектен (4.99) бағалауды қорытуға болады, мұндағы $K_6 = K_4'$, ал K_4' тұрақтысы (4.59) өрнектен анықталады.*

4.3. Шектік көшу

$j \to \infty$ **шектік көшу.** Бұл бөлімде, өткен бөлімдерде басталған 4.1-теореманың дәлелдеуі жалғасын табады.

Дәлелдеуі 39. *(4.1-теорема) (4.54)-(4.59) бағалаулар мен Банах-Алаоглы теоремасын ескерсек, онда келесі нәтижелерді тұжырымдауға болады*

$$\mathbf{u}_n^j \rightharpoonup \mathbf{u}_n \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{V})\text{-де},\ j \to \infty, \tag{4.104}$$
$$\mathbf{u}_n^j \rightharpoonup \mathbf{u}_n \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{V})\text{-де},\ j \to \infty, \tag{4.105}$$
$$\mathbf{u}_n^j \rightharpoonup \mathbf{u}_n \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де},\ j \to \infty, \tag{4.106}$$
$$\mathbf{u}_n^j \rightharpoonup \mathbf{u}_n \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де},\ j \to \infty, \tag{4.107}$$
$$\frac{\partial \mathbf{u}_n^j}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{V})\text{-де},\ j \to \infty, \tag{4.108}$$
$$\frac{\partial \mathbf{u}_n^j}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{V})\text{-де},\ j \to \infty, \tag{4.109}$$
$$\frac{\partial \mathbf{u}_n^j}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де}, \tag{4.110}$$
$$\frac{\partial \mathbf{u}_n^j}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де},\ j \to \infty \tag{4.111}$$

$$p_n^j \rightharpoonup p_n \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))\text{-де},\ j\to\infty \tag{4.112}$$
$$p_n^j \rightharpoonup p_n \quad *-\text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))\text{-де},\ j\to\infty. \tag{4.113}$$

Олай болса, Обэн-Лионстың компакттілік леммасын ((35) 4-лемма), (4.108) өрнек пен $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ *компакттілі енгізуімен бірге қолдансақ, онда* $\mathbf{u}_n^j$ *іштізбегі үшін төмендегі әлді жинақтылық орынды*

$$\mathbf{u}_n^j \xrightarrow[j\to\infty]{} \mathbf{u}_n \quad L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}. \tag{4.114}$$

Сондай-ақ, (4.53) өрнекті және Банах-Алаоглы теоремасын ескерсек, онда ρ_n^j *іштізбегі үшін келесі* $*-$ *әлсіз жинақтылық орынды екенін көруге болады*

$$\rho_n^j \rightharpoonup \rho_n \quad *-\text{әлсіз жинақты } \ L^\infty(0,T;\mathbf{L}^\infty(\Omega))\text{-де}, j\to\infty. \tag{4.115}$$

Сонымен қатар, ρ_n *жуықтауы төмендегі өрнектерді қанағаттандырады*

$$\frac{\partial\rho_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_n\mathbf{u}_n) = 0, \qquad (\mathbf{x},t)\in Q_T, \tag{4.116}$$
$$\frac{1}{n} \leqslant \rho_n \leqslant \overline{M} < \infty, \qquad (\mathbf{x},t)\in Q_T. \tag{4.117}$$

Мұнымен қоса, төмендегі

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_n = 0, \qquad (\mathbf{x},t)\in Q_T, \tag{4.118}$$

тұжырымын (4.116) өрнекпен бірге қолданып, (4.53) және (4.54) бағалауларды ескерсек, онда келесі бірқалыпты шенелгендікті дәлелдеуге болады

$$\frac{\partial\rho_n^j}{\partial t} \text{ бірқалыпты шенелген } L^2(0,T;\mathbf{W}^{-1,2^*}(\Omega))\text{-де}. \tag{4.119}$$

Сонымен бірге, келесі компактілі және үзіліссіз енгізулер орынды

$$\mathbf{L}^\infty(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbf{W}^{-1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{W}^{-1,2^*}(\Omega). \tag{4.120}$$

Олай болса, (4.53), (4.119) және (4.120) өрнектер арқылы Обэн-Лионс леммасын қолданып, ρ_n^j *іштізбегі үшін келесі әлді жинақтылық орынды екенін аңғаруға болады*

$$\rho_n^j \xrightarrow[j\to\infty]{} \rho_n \quad C([0,T];\mathbf{W}^{-1,\infty}(\Omega))\text{-де}. \tag{4.121}$$

Сондай-ақ, $(4.36)_2$ *және* $(4.43)_3$ *өрнектерді (4.60) өрнекпен бірге қолданып төмендегі теңдіктерді тұжырымдауға болады*

$$\left\|\rho_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2 = \|\rho_{0,n}\|_{2,\Omega}^2 \text{ және } \|\rho_n(t)\|_{2,\Omega}^2 = \|\rho_{0,n}\|_{2,\Omega}^2,\ \forall t\in[0,T]. \tag{4.122}$$

Демек, (4.115) және (4.122) өрнектерді (4.121) әлді жинақтылықпен бірге қолданып, барлық $t \in [0,T]$ үшін келесі өрнек алынады

$$\begin{aligned}&\left\|\rho_n^j(t)-\rho_n(t)\right\|_{2,\Omega}^2=\left\|\rho_n^j(t)\right\|_{2,\Omega}^2-\|\rho_n(t)\|_{2,\Omega}^2+\\&2\int\limits_\Omega(\rho_n(t)-\rho_n^j(t))\rho(t)\,dx\xrightarrow[j\to\infty]{}0.\end{aligned}\tag{4.123}$$

Сөйтіп, (4.117) және (4.123) өрнектерден келесі жинақтылық қорытылады

$$\left\|\rho_n^j(t)-\rho_n(t)\right\|_{2,\Omega}^2\xrightarrow[j\to\infty]{}0,\quad\forall\ q:2\leqslant q<\infty.\tag{4.124}$$

Ал, (4.121) және (4.124) өрнектерден

$$\rho_n^j\xrightarrow[j\to\infty]{}\rho_n\quad\text{әлді жинақты } C([0,T];\mathbf{L}^q(\Omega))-\text{де},\quad\forall\ q:2\leqslant q<\infty,$$

тұжырымы орынды. Соңғы және (4.53) өрнектен

$$\rho_n^j\xrightarrow[j\to\infty]{}\rho_n\quad\text{әлді жинақты } C([0,T];\mathbf{L}^q(\Omega))-\text{де},\quad\forall\ q\geqslant1.\tag{4.125}$$

әлді жинақтылық та тұжырымдалады.

Енді (4.108) және (4.114) жинақтылықтарды (4.117) және (4.125) өрнектермен бірге қолдансақ, онда келесі тұжырымдарды қорытуға болады

$$\rho_n^j\frac{\partial\mathbf{u}_n^j}{\partial t}\rightharpoonup\rho_n\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial t},\quad\text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}, j\to\infty\tag{4.126}$$

$$\rho_n^j\mathbf{u}_n^j\to\rho_n\mathbf{u}_n\ \text{әлді жинақты}\ L^r(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))\text{-де, мұндағы}\ 1\leqslant r<2^*.\tag{4.127}$$

Сондай-ақ, (4.53), (4.54) және (4.55) өрнектермен (4.114) және (4.125) жинақтылықтарды бірге ескеріп, келесі жинақтылық қорытуға болады

$$\rho_n^j(\mathbf{u}_n^j\cdot\nabla)\mathbf{u}_n^j\xrightarrow[j\to\infty]{}\rho_n(\mathbf{u}_n\cdot\nabla)\mathbf{u}_n,\qquad L^1(0,T;\mathbf{L}^1(\Omega))\text{-де}.\tag{4.128}$$

Сонымен бірге, (4.106) және (4.110) өрнектерден

$$\Delta\mathbf{u}_n^j\rightharpoonup\Delta\mathbf{u}_n,\quad\text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}, j\to\infty,\tag{4.129}$$

$$\frac{\partial\Delta\mathbf{u}_n^j}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial\Delta\mathbf{u}_n}{\partial t},\quad\text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}, j\to\infty.\tag{4.130}$$

тұжырымдар қорытылады.

Айталық, $\zeta\in C_0^\infty([0,T))$ болсын. (4.50) өрнекті ζ функциясына көбейтіп, содан кейін 0 мен T аралығында интегралдасақ, онда $\boldsymbol{\psi}\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{V}$ функциясы үшін төмендегі нәтиже тұжырымдалады

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_T}\left[\rho_n^j\frac{\partial\mathbf{u}_n^j}{\partial t}+\rho_n^j\left(\mathbf{u}_n^j\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n^j-\mu\Delta\mathbf{u}_n^j-\kappa\frac{\partial\Delta\mathbf{u}_n^j}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{\psi}\,\zeta\,dxdt=\\&\int\limits_{Q_T}\rho_n^j\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,\zeta\,dxdt\end{aligned}\tag{4.131}$$

Соңымен қатар, (4.52) өрнек үшін де жоғарыдағы секілді есептеулер жасасақ, онда $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ *функциясы үшін*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T} \left[\rho_n^j \frac{\partial \mathbf{u}_n^j}{\partial t} + \rho_n^j \left(\mathbf{u}_n^j \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_n^j - \mu \Delta \mathbf{u}_n^j - \kappa \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_n^j}{\partial t} \right] \cdot \boldsymbol{\psi}\, \zeta \, dxdt - \\ &\int\limits_{Q_T} \rho_n^j \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi}\, \zeta \, dxdt = \int\limits_{Q_T} p_n^j \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}\, \zeta \, dxdt \end{aligned} \tag{4.132}$$

теңдігі қорытылады. Сондай-ақ, (4.42) өрнекті $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\phi}\,\zeta, \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ *функциясына көбейтіп, алынған нәтижені* Q_T *цилиндр бойынша интегралдағанда, онда төмендегі өрнек тұжырымдалады*

$$-\int\limits_{Q_T} \rho_n^j \boldsymbol{\phi}\, \zeta' \, dxdt - \int\limits_{Q_T} \rho_n^j \mathbf{u}_n^j \cdot \nabla \boldsymbol{\phi}\, \zeta \, dxdt = \zeta(0) \int\limits_{\Omega} \rho_{0,n}^j \boldsymbol{\phi} \, dx, \; \forall \; \boldsymbol{\phi} \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.133}$$

Мұнан әрі қарай (4.131) өрнектегі әрбір қосылғыш үшін (4.126), (4.128), (4.129)-(4.130) жинақтылықтармен бірге (4.125) әлді жинақтылықты пайдаланып, (4.41) теңдіктен $j \to \infty$ *бойынша шекке көшу қорытылады.*

Сөйтіп, (4.112), (4.125) және (4.127) жинақтылықтармен қоса (4.46) әлді жинақтылық арқылы (4.133) теңдіктен $j \to \infty$ *бойынша шекке көшу тұжырымдалады.*

Демек, $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}$ *және барлық* $\zeta \in C_0^\infty([0,T))$ *функциялары үшін*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T} \left[\rho_n \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \rho_n \left(\mathbf{u}_n \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_n - \mu \Delta \mathbf{u}_n - \kappa \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_n}{\partial t} \right] \cdot \boldsymbol{\psi} \zeta \, dx = \\ &\int\limits_{Q_T} \rho_n \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi} \zeta \, dxdt, \end{aligned} \tag{4.134}$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_T} \left[\rho_n \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \rho_n \left(\mathbf{u}_n \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_n - \mu \Delta \mathbf{u}_n - \kappa \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_n}{\partial t} \right] \cdot \boldsymbol{\psi} \, dxdt - \\ &\int\limits_{Q_T} \rho_n \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\psi}\, \zeta \, dxdt = \int\limits_{Q_T} p_n \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}\, \zeta \, dx \end{aligned} \tag{4.135}$$

соңымен қатар, $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ *және барлық* $\zeta \in C_0^\infty([0,T))$ *функциялары үшін*

$$-\int\limits_{Q_T} \rho_n \boldsymbol{\phi}\, \zeta' \, dxdt - \int\limits_{Q_T} \rho_n \mathbf{u}_n \cdot \nabla \boldsymbol{\phi}\, \zeta \, dxdt = \zeta(0) \int\limits_{Q_T} \rho_{0,n} \boldsymbol{\phi} \, dx \tag{4.136}$$

теңдіктері тұжырымдалады.

*$n\to\infty$ **шектік көшу.** Өткен бөлімде $n\in\mathbb{N}$ мәнінде кемінде бір $(\rho_n,\mathbf{u}_n,p_n)$ шешім табылып, $\psi\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{V}$ функциясы үшін*

$$\int\limits_\Omega \left[\rho_n\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}+\rho_n\left(\mathbf{u}_n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n-\mu\Delta\mathbf{u}_n-\kappa\frac{\partial\Delta\mathbf{u}_n}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{\psi}\,dx=\int\limits_\Omega\rho_n\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dx \quad (4.137)$$

және $\psi\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)$ функциясы үшін

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega \left[\rho_n\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}+\rho_n\left(\mathbf{u}_n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_n-\mu\Delta\mathbf{u}_n-\kappa\frac{\partial\Delta\mathbf{u}_n}{\partial t}\right]\cdot\psi\,dx-\\ \int\limits_\Omega\rho_n\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\psi}\,dx=\int\limits_\Omega p_n\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi}\,dx\end{gathered} \quad (4.138)$$

теңдіктерін $(0,T)$ аралығында жалпылама функция мағынасында қанағаттандыратынын дәлелдедік. Мұнымен қоса, (4.116) өрнектен ρ_n функциясы үшін келесі теңдік орынды екенін көруге болады

$$\frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\mathbf{u}_n\cdot\nabla\rho_n=0 \qquad in \quad Q. \quad (4.139)$$

Енді (4.137), (4.138) және (4.139) теңдіктерді қолданып, сондай-ақ, (4.53), (4.54)-(4.59) және (4.98)-(4.99) бағалауларды алу тәсіліндей келесі теңсіздіктерді тұжырымдауға болады

$$0<\frac{1}{n}\leqslant\inf_{x\in\overline{\Omega}}\rho_{0,n}(x)\leqslant\rho_n(x,t)\leqslant\sup_{x\in\overline{\Omega}}\rho_{0,n}(x)\leqslant\overline{M}<\infty,(x,t)\in Q_T, \quad (4.140)$$

$$\sup_{t\in(0,T)}\left(\left\|\sqrt{\rho_n(t)}\mathbf{u}_n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\nabla\mathbf{u}_n(t)\right\|_{2,\Omega}^2\right)+ \quad (4.141)$$

$$\mu\int\limits_0^T\|\nabla\mathbf{u}_n(t)\|_{2,\Omega}^2\,dt\leqslant K_1, \quad (4.142)$$

$$\int\limits_0^T\left(\left\|\sqrt{\rho_n(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\frac{\partial\nabla\mathbf{u}_n(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2\right)dt\leqslant K_2, \quad (4.143)$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\left\|\sqrt{\rho_n(t)}\frac{\partial\mathbf{u}_n(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\frac{\partial\nabla\mathbf{u}_n(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2\right)\leqslant K_2' \quad (4.144)$$

$$\kappa\sup_{t\in(0,T)}\left\|D^2\mathbf{u}_n(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\mu\int\limits_0^T\left\|D^2\mathbf{u}_n(t)\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant K_3, \quad (4.145)$$

$$\kappa^2\int\limits_0^T\left\|\frac{\partial D^2\mathbf{u}_n(t)}{\partial t}\right\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant K_4 \quad (4.146)$$

$$\kappa^2 \sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial D^2 \mathbf{u}_n(t)}{\partial t} \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant K_4', \tag{4.147}$$

$$\int_0^T \left\| \nabla p_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 dt \leqslant K_7, \tag{4.148}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \nabla p_n^j(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant K_8, \tag{4.149}$$

ал K_1, K_2, K_2', K_3, K_4 және K_4' оң $n-$нен тәуелсіз тұрақтылар. Олай болса, (4.141), (4.143), (4.144), (4.145), (4.146) және (4.147) бағалаулар арқылы Банах-Алаоглы теоремасын қолданып келесі $*-$ әлсіз және әлсіз жинақтылықтар алынады

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{V})\text{-де}, n \to \infty \tag{4.150}$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \quad * -\text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{V})\text{-де}, n \to \infty \tag{4.151}$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де}, n \to \infty \tag{4.152}$$

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де}, n \to \infty \tag{4.153}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{V})\text{-де}, n \to \infty \tag{4.154}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{V})\text{-де}, n \to \infty \tag{4.155}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де}, n \to \infty \tag{4.156}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\text{-де}, n \to \infty \tag{4.157}$$

$$p_n \rightharpoonup p, \quad \text{әлсіз жинақты } L^2(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))\text{-де}, n \to \infty \tag{4.158}$$

$$p_n \rightharpoonup p, \quad * - \text{әлсіз жинақты } L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,2}(\Omega))\text{-де}, n \to \infty. \tag{4.159}$$

Сондай-ақ, (4.150) және (4.154) жинақтылықтармен Обэн-Лионстың компактті енгізу леммасын (4-лемма (35) қараңыз) бірге қолдансақ, онда төмендегі әлді жинақтылық тұжырымдалады

$$\nabla \mathbf{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nabla \mathbf{u}, \qquad L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\text{-де}. \tag{4.160}$$

Сонымен қатар, (4.116) өрнекті (4.140) және (4.141) жинақтылықтарымен Обэн-Лионстың компактті енгізу леммасын бірге қолдансақ, онда келесі

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} \ \text{бірқалыпты шенелген } L^2(0,T;\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))\text{-де}. \tag{4.161}$$

бірқалыпты шенелгендік алынады.

Енді, (4.116) және (4.161) өрнектер арқылы Обэн-Лионстың компактілік туралы леммасын (Лемма 4 (36) қараңыз) ρ_n іштізбегі үшін қол-

данганда, төмендегі әлді жинақтылық тұжырымдалады

$$\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \qquad C([0,T];\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))\text{-де.} \tag{4.162}$$

Мұнан соң,

$$\rho_n\mathbf{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho\mathbf{u}, \qquad (C_0([0,T]\times\Omega))'\text{-де} \tag{4.163}$$

әлді жинақтылықты да қорытуға болады, мұндағы ρ функциясы (4.3) теңдеудің шешімі және келесі шарттарды қанағатандырады

$$0 \leqslant \rho \leqslant \overline{M} < \infty, \qquad (\mathbf{x},t)\in Q_T, \tag{4.164}$$

$$\|\rho(t)\|_{q,\Omega} = \|\rho_0\|_{q,\Omega} \quad \forall\ q: 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{4.165}$$

Егер де ρ_0 функциясы $0-$ден өзгеше болғанда, онда $\mathbf{u}_n$ шешім $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))-$де бірқалыпты шенелмеген болар еді. Бұл $n\to\infty$ бойынша шекке көшкенде үлкен қиындық тудырары анық.

Лемма 4.1. *Айталық, 4.1-теореманың шарттары мен (4.162), (4.163) жинақтылықтар орынды болсын. Онда ρ_0 іштізбегі табылып, төмендегі әлді жинақтылықтарды қанағаттандырады*

$$\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \qquad C([0,T];\mathbf{L}^q(\Omega)) - \text{де} \quad \forall\ q \geqslant 1, \tag{4.166}$$

$$\sqrt{\rho_n}\mathbf{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\rho}\mathbf{u}, \qquad L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) - \text{де}. \tag{4.167}$$

Дәлелдеуі 40. *4.1-лемманы дәлелдеу үшін ди Перна-Лионс [96] ренормаланған аргументті сызықты тасымал теңдеуінің теориясына негізделеді. Сонымен бірге, [97, 2.5-теорема] және Дежарден [98] қараңыз.*

Соңғы нәтижені пайдаланып (4.116) және (4.33) өрнектерді (4.135) және (4.136) өрнектермен бірге қолдысақ, онда барлық $\boldsymbol{\varphi}\in C_0^1([0,T);\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega)\cap \mathbf{H}^2(\Omega))$ функциясы үшін

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_T}(\rho_n\mathbf{u}_n-\kappa\Delta\mathbf{u}_n)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}dxdt- \\
\mu\int\limits_{Q_T}\Delta\mathbf{u}_n\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dxdt-\int\limits_{Q_T}\rho_n\mathbf{u}_n\otimes\mathbf{u}_n:\nabla\boldsymbol{\varphi}\,dxdt-\int\limits_{Q_T}\rho_n\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dxdt= \\
\int\limits_{\Omega}\big(\rho_{n,0}\mathbf{u}_{n,0}\cdot\boldsymbol{\varphi}(0)+\kappa\nabla\mathbf{u}_{n,0}:\nabla\boldsymbol{\varphi}(0)\big)dx+\int\limits_{Q_T}p_n\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,dx
\end{gathered} \tag{4.168}$$

және барлық $\boldsymbol{\phi}\in C_0^\infty([0,T)\times\Omega)$ функциясы үшін

$$-\int\limits_{Q_T}\rho_n\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial t}\,dxdt-\int\limits_{Q_T}\rho_n\mathbf{u}_n\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}\,dxdt=\int\limits_{\Omega}\rho_{0,n}\boldsymbol{\phi}(0)\,dx \tag{4.169}$$

теңдіктер қорытылады.

Енді (4.150)-(4.152), (4.158), (4.166) және (4.167) өрнектерді (4.25), (4.26) және (4.28) өрнектермен бірге қолданып, (4.168) теңдікте $n \to \infty$ бойынша шеккен көшкенде ρ, $\mathbf{u}$ және p функциялары үшін (4.2) теңдеу Q_T-да жалпылама функция мағынасында орындалатынын көруге болады. Сондай-ақ, (4.166) және (4.167) өрнектерді (4.26) және (4.28) өрнектермен бірге қолданып, (4.169) теңдіктен $n \to \infty$ бойынша шеккен көшкенде ρ, $\mathbf{u}$ функциялары үшін (4.3) теңдеу Q_T-да жалпылама функция мағынасында орындалатынын көруге болады.

Қорыта айтқанда, (4.140) және (4.141)-(4.147) бағалауларды (4.150)-(4.158) және (4.166)-(4.167) жинақтылықтармен біріктіргенде, 4.1-теореманың (1)-(5) тармақтары және 4.2-теореманың (1)-(4) тармақтары орындалатынын көру болады.

Ескерту 4.4. *Ескерер жәйт, (4.145) және (4.146) бағалауларды (38) және (40) Соболев теңсіздіктерімен бірге қолданып $K_7 = C(d, K_3)$, $K_8 = C(d, K_4)$ оң тұрақтылары үшін төмендегі бағалаулар тұжырымдалады.*

$$\kappa \sup_{t\in(0,T)} \|\mathbf{u}_n(t)\|^2_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant K_7, \quad 0 < \alpha \leqslant 2 - \frac{d}{2},\ 2 \leqslant d \leqslant 3,$$

$$\kappa^2 \int_0^T \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_n(t)}{\partial t} \right\|^2_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} dt \leqslant K_8, \quad 0 < \alpha \leqslant 2 - \frac{d}{2},\ 2 \leqslant d \leqslant 3,$$

4.4. Жалғыздығы

Бұл бөлімде (4.1)-(4.5) есебінің $(\mathbf{u}, \rho, p)$ шешімінің $\mathbf{u}$ және ρ компоненттерінің жалғыздығы дәлелденеді. Дәлелдеуге кірісбес бұрын, (4.1)-(4.5) есебінің $(\mathbf{u}, \rho, p)$ шешіміне қатысты қосымша регулярлылық беретін кейбір нәтижелер қолданылады.

Ең алдымен, біртекті емес Навье-Стокс теңдеулері үшін ρ тығыздыққа қатысты регулярлық нәтижесін еске түсірейік. Бұл нәтиже пайдалы, өйткені үзіліссіздік теңдеуі біртекті емес Навье-Стокс пен Навье-Стокс-Войгт теңдеулер жүйелері үшін бірдей.

Сөйлем 4.4. *Айталық, $(\mathbf{u}, \rho, p)$ функциялары 4.2-теореманың шарттарын қанағаттандыратын (4.1)-(4.5) есебінің шешімдері болсын. Егер (4.21) және*

$$\mathbf{u} \in C([0, T]; \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)) \tag{4.170}$$

орынды болса, онда барлық $t \in [0, T]$ үшін келесі регулярлық тұжырымдалады

$$\|\nabla\rho(t)\|_{\infty,\Omega} \leqslant \sqrt{d}\|\nabla\rho_0\|_{\infty,\Omega} \exp\left(\int_0^t \|\nabla\mathbf{u}(s)\|_{\infty,\Omega}\, ds\right), \tag{4.171}$$

$$\|\rho_t(t)\|_{\infty,\Omega} \leqslant \sqrt{d}\|\nabla\rho_0\|_{\infty,\Omega}\|\mathbf{u}(t)\|_{\infty,\Omega}\exp\left(\int\limits_0^t \|\nabla\mathbf{u}(s)\|_{\infty,\Omega}\,ds\right) \tag{4.172}$$

Дәлелдеуі 41. *Бұл тұжырымды дәлелдеу үшін Ладыженская және Солонниковтің [95, 1.3-лемма] жұмысындағы 4.4-сөйлемге негізделеді.*

Келесі нәтиже шешімдердің жоғары регулярлығы есептің берілгендеріне қаншалықты тәуелді екенін көрсетеді.

Сөйлем 4.5. *Айталық, $(\mathbf{u},\rho,p)$ функциялары 4.2-теореманың шарттарын қанағаттандыратын (4.1)-(4.5) есебінің шешімдері болсын. Егер, (4.21) шартпен қоса (4.22)-(4.23) және (4.24) шарттар орынды болса, онда K_9 және K_{10} оң тұрақтылары үшін төмендегі бағалалулар орынды.*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\left\|D^2\mathbf{u}(t)\right\|^2_{r,\Omega}+\|\nabla\mathbf{u}(t)\|^2_{\infty,\Omega}\right)+\|\nabla p\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\leqslant K_9, \tag{4.173}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla\rho\|^2_{\infty,\Omega}+\|\rho_t\|^2_{\infty,\Omega}\right)\leqslant K_{10}. \tag{4.174}$$

Дәлелдеуі 42. *Ескерер жәйт,(4.21) және (4.22)-(4.23) шарттарын қолданып, [70, 4-теорема]-де $C_1 = C\left(\mu,\kappa,\overline{M},d,\Omega,T,\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega},\|\Delta\mathbf{u}_0\|_{r,\Omega},\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\right)$ және $C_2 = C\left(\mu,\kappa,\overline{M},d,\Omega,T,\|\nabla\rho_0\|^2_{\infty,\Omega},\|\nabla\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega},\|\Delta\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega},\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\right)$ тұрақтылары үшін келесі бағалау алынған болатын*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\Delta\mathbf{u}(t)\|^2_{r,\Omega}+\|\nabla\mathbf{u}(t)\|^2_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right)+\|\nabla p\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\leqslant C_1, \tag{4.175}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla\rho\|^2_{\infty,\Omega}+\|\rho_t\|^2_{\infty,\Omega}\right)\leqslant C_2. \tag{4.176}$$

Айта кету керек, $\Omega-$ның ішкі облыстарында бастапқы тығыздық жойылып кетуі мүмкін бе деген сұрақ бұл нәтиже үшін маңызды емес. Сөйтіп, (4.24) шартты (32) және (37) Соболев теңсіздіктерін қолданып, төмендегідей нәтиже алынады:

$$\|\mathbf{u}_t(t)\|_{r,\Omega}\leqslant C(r,d,\Omega)\,\|\nabla\mathbf{u}_t(t)\|_{2,\Omega}\,,\quad r\leqslant 2^*,$$
$$\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{\infty,\Omega}\leqslant C(r,d)\left\|D^2\mathbf{u}(t)\right\|_{r,\Omega},\quad r>d.$$

Демек, (38) шарттың көмегімен (4.175)-(4.176) бағалаулардың салдары ретінде (4.173) және (4.174) бағалауларды аңғаруға болады.

Енді 4.3-теореманы дәлелдеуді бастайық.

Дәлелдеуі 43. *(4.3-теорема) Айталық, $(\hat{\mathbf{u}},\hat{p},\hat{\rho})$ және $(\overline{\mathbf{u}},\overline{p},\overline{\rho})$ функциялары (4.1)-(4.5) есебінің бірдей бастапқы берілгендеріне сәйкес шешімдері болсын. Осы екі жұп шешімдердің әрқайсысы қанағаттандыратын (4.1)-(4.5) есебінен алгебралық түрлендіру арқылы келесі өрнекті алуға болады*

$$\hat{\rho}\mathbf{u}_t+\hat{\rho}\left(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}-\mu\Delta\mathbf{u}-\kappa\Delta\mathbf{u}_t+\nabla p= \tag{4.177}$$

$$
\begin{aligned}
&\rho\left[\mathbf{f}-\overline{\mathbf{u}}_t-(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}}\right]-\hat{\rho}\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}} && (4.178)\\
&\rho_t+\nabla\hat{\rho}\cdot\mathbf{u}+\nabla\rho\cdot\hat{\mathbf{u}}=0, && (4.179)\\
&\operatorname{div}\mathbf{u}=0, && (4.180)
\end{aligned}
$$

мұндағы $\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}-\overline{\mathbf{u}}$, $p=\hat{p}-\overline{p}$ *және* $\rho=\hat{\rho}-\overline{\rho}$. *Олай болса, (4.177) өрнекті* $\mathbf{u}$ *функциясына көбейтіп және* Ω *облыс бойынша интегралдап, (4.180) шартты қолдансақ, онда*

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\sqrt{\hat{\rho}(t)}\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\nabla\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2\right)+\mu\left\|\nabla\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2=\\
\int\limits_{\Omega}\Big(\rho(t)\left[\mathbf{f}(t)-\overline{\mathbf{u}}_t(t)-(\overline{\mathbf{u}}(t)\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}}(t)\right]-\hat{\rho}(t)\,(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}}(t)\Big)\cdot\mathbf{u}(t)dx
\end{gathered}
\tag{4.181}
$$

теңдігі шығады. Сондай-ақ (4.179) өрнекті ρ *функциясына көбейтіп және* Ω *облыс бойынша интегралдап, (4.180) шартты қолдансақ, онда келесі теңдік тұжырымдалады*

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\rho(t)\|_{2,\Omega}^2=-\int\limits_{\Omega}\rho(t)(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\overline{\rho}(t)dx. \tag{4.182}
$$

Енді (4.181) және (4.182) өрнектерді біріктірсек, онда барлық $t\in[0,T]$ *үшін төмендегі теңдік алынады*

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\sqrt{\hat{\rho}(t)}\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\nabla\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\|\rho(t)\|_{2,\Omega}^2\right)+\\
\mu\left\|\nabla\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2=\int\limits_{\Omega}\Big(\rho(t)\left[\mathbf{f}(t)-\overline{\mathbf{u}}_t(t)-(\overline{\mathbf{u}}(t)\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}}(t)\right]-\\
\hat{\rho}(t)\,(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\,\overline{\mathbf{u}}(t)\Big)\cdot\mathbf{u}(t)dx-\int\limits_{\Omega}\rho(t)(\mathbf{u}(t)\cdot\nabla)\overline{\rho}(t)dx
\end{gathered}
\tag{4.183}
$$

Осылайша, (4.183) теңдіктің оң жағындағы қосылғыштарға бағалаулар алу (4.164), (4.21) және (4.173)-(4.174) өрнектерді пайдалана отырып, [70, 5-теорема] жұмыстағы секілді дәлелденеді. Демек, барлық $t\in[0,T]$ *және қайсыбір* A *функциясы үшін төмендегі дифференциалдық теңсіздік алынады*

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\left\|\sqrt{\hat{\rho}(t)}\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\nabla\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\|\rho(t)\|_{2,\Omega}^2\right)\leqslant\\
A(t)\left(\left\|\sqrt{\hat{\rho}(t)}\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\kappa\left\|\nabla\mathbf{u}(t)\right\|_{2,\Omega}^2+\|\rho(t)\|_{2,\Omega}^2\right)
\end{gathered}
\tag{4.184}
$$

мұндағы A *функциясы 4.2-теоремадан, (4.164), (4.21) және (4.173)-(4.174) нәтижелерінен* $L^1(0,T)$ *кеңістігінің элементі екенін көру қиын емес. (4.184) өрнекке Гронуолл теңсіздігін қолдану арқылы* $\hat{\rho}=\overline{\rho}$ *және* $\hat{\mathbf{u}}=\overline{\mathbf{u}}$ *тұжырымы алынады.*

ҚОРЫТЫНДЫ

Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыстағы кіріспеде зерттеу тақырыбының өзектілігі мен ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық құндылығы, зерттеу әдістері келтірілді, сондай-ақ, диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берілді.

Көмекші нәтижелер бөлімінде диссертациялық жұмыста алынған нәтижелерді тұжырымдау үшін математикалық және функционалдық анализ курсынан, сұйықтар механикасы теориясынан белгілі функционалдық кеңістіктер мен белгілеулер енгізіледі, сонымен қатар қажетті анықтамалар, леммалар, теоремалар, алгебралық және функционалдық теңсіздіктер келтірілді.

Алынған нәтижелер:

- Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Глобалды шешілімді болатын интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің әлсіз және әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Арнайы интегралдық қосымша шартпен берілген сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Сызықты емес жылу көзімен берілген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды және глобалды әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Абсорбция мүшемен берілген сызықты p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есебінің уақыт бойынша локалды және глобалды әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді;

- Біртекті емес сұйықтықтар үшін бастапқы тығыздығы вакуумге айналатын Кельвин-Фойгт жүйесі үшін бастапқы-шеттік есебінің әлді шешімінің бар болуы мен жалғыздығы, регулярлығы дәлелденді.

Диссертациялық жұмысты орындау барысында алынған негізгі нәтижелер [73, 74, 99–108] жұмыстарда жарияланды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1 Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров//Докл. АН СССР. —1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.

2 Ладыженская О.А. О некоторых нелинейных задачах теории сплош- ных сред//Международный конгресс математиков. Тезисы докладов. — Москва: 1966. — Р. 560–573.

3 Zvyagin, V.G., Turbin M.V. The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt//J. Math. Sci. —2010. —Vol.168. — P.157–308.

4 Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids and Oldroyd fluids//Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. —1989. —Vol. 179. — P.137–182.

5 Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin. I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marcel Dekker, 1999.

6 Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications.— Berlin: De Gruyter, 2011.

7 Ramm A.G. Inverse problems, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering — New York: Springer, 2005.

8 Leray, J. Etude de diverses ´equations int´egrales nonlin´eaires et de quelques probl´emes que pose l’hydrodynamique//J. Math. Pures. Appl. —1933. —Vol. 12. —P. 1–82.

9 Ladyzhenskaya, O.A. Mathematical problems in the dynamics of a viscous incompressible fluid//O.A. Ladyzhenskaya. — Moscow: GIFML, 1961.

10 Kato T. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^d//J. Funct. Anal. — 1972. — Vol. 9. — P. 296–305.

11 Temam R. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis— Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1977.

12 Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non liniaires — Paris: Dunod, 1969.

13 Sedov L. Mechanics of Continuous Media II — Moscow: MIREditions,

1997.

14 da Veiga H.B., Valli A. On the Euler equations for nonhomogeneous fluids I//Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — Vol. 63. —P. 151–168.

15 da Veiga H.B., Valli A. On the Euler equations for nonhomogeneous fluids II//Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — Vol. 73. —P. 338–350.

16 Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary value problems in the mechanics of inhomogeneous fluids. —Novosibirsk: Science, 1983. — С. 320.

17 Simon J. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure//SIAM J. Math. Anal. —1990.—Vol. 5. —P. 1093–1117.

18 Choe H.J., Kim H. Strong solutions of the Navier-Stokes equations for nonhomogeneous incompressible fluids//Comm. Part. Diff. Equations. — 1984. — Vol. 28, no. 5-6. — P. 1183–1201.

19 Baldybek Zh., Otelbaev M., Smagulov Sh. A method for the approximate solution of an initial-boundary value problem for the Navier-Stokes equations//Doklady Mathematics. — 2002. — Vol. 66, no. 2. — P. 206–209.

20 Baldybek Zh., Otelbaev M., Smagulov Sh. One of the approximated method of solving initial- value-edged problem of Navier-Stocks equation//Doklady Akademii Nauk. — 2002. — Vol. 386, no. 4. — P. 439–443.

21 Смагулов Ш., Орунханов М. Метод фиктивных областей для уравнений Навье–Стокса с неоднородными граничными условиями//Матем. моделирование. — 2000. — Т. 12, № 10. — С. 121–127.

22 Danaev N.T., Smagulov Sh., N.T., Temirbekov N.M. Numerical solution of Navier-Stokes equations for an incompressible liquid in channels with a porous insert//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1995. — Vol. 36, no. 5. — P. 658–665.

23 Данаев Н.Т., Смагулов Ш., Темирбеков Н.М. Об одном классе итерационных схем для решения сеточных уравнений Навье–Стокса//Сиб. журн. вычисл. матем. — 2002.— Т. 5, № 3. — С. 225–231.

24 Ladyzhenskaya O.A. Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness//Russian Mathematical Surveys. — 2003. — Vol. 2. — P. 251–286.

25 Vasin I.A. A nonlinear inverse problem of the simultaneous reconstructionof the evolution of two coefficients in Navier–Stokes equations. II//Differ. Uravn. — 1997. —Vol.8. —P.1095–1100.

26 Abylkairov U.U. Odnoznachnaya razreshimost zadachi protekaniya dlya 2D-3D sistemy Navier-Stokesa.II// Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 17, no. 3. — P. 11–18.

27 Abylkairov U.U., Aitzhanov S.E. Inverse problem for non-stationary system of magnetohydrodynamics//Boundary Value Problems. — 2015. — Vol. 1. — P. 1–17.

28 Jenaliyev M.T., Bektemesov M.A., Yergaliyev M.G. On an inverse problem for a linearized system of Navier- Stokes equations with a final overdetermination condition // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2023.

29 Jenaliyev M.T., Ramazanov M.T., Yergaliyev M.G. On the numerical solution of one inverse problem for alinearized two-dimensional system of Navier-Stokes equations//Opuscula Mathematica. —2022. — Vol. 42, no. 5. —P. 709–725.

30 Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu. Exact controllability of the Navier–Stokes and Boussinesq equations//Uspekhi Mat. Nauk. — 1999. — Vol. 54:3. — P. 93–146.

31 Chebotarev A.Y. Inverse problems for stationary Navier-Stokes systems// Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, no. 3. — P. 537–545.

32 Fan J., Nakamura G. Well-posedness of an inverse problem of Navier–Stokes equations with the final overdetermination//Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2009. — Vol. 17, no. 6. — P. 565–584.

33 Imanuvilov O.Yu., Yamamoto M. Remark on boundary data for inverse boundary value problems for the Navier–Stokes equations//Inverse Problems. — 2015. — Vol. 10.

34 Joseph D.D. Fluid dynamics of viscoelastic liquids. — New York: Springer-

Verlag, 1990.

35 Wilkinson W.L. Non-Newtonian liquids — Moscow: Mir, 1964. — P. 216.

36 Litvinov V.G. Nonlinear viscous fluid motion — Moscow: Nauka, 1982. — P. 376.

37 Chhabra R.P., Richardson J.F. Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications. — Oxford: Butterworth- Heinemann, 2008. — P. 536.

38 Zhikov V.V., Pastuk S.E. On the solvability of the Navier-Stokes system for anonhomogeneous non-Newtonian fluid//Translated from the Russian in Dokl. Math. — 2009. — Vol. 79. — P. 403–407.

39 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids//Commun. Math. Sci. — 2019. — Vol. 17, no. 7. — P. 1915–1948.

40 Antontsev S.N., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms// J. Math. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 456, no. 1. — P. 99–116.

41 Antontsev S.N., Khompysh Kh. Kelvin-Voight equation with p-Laplacian and damping term: Existence, uniqueness and blow-up // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 446, no. 2. — P. 1255–1273.

42 Karazeeva N.A. Solvability of initial boundary value problems for equations describing motions of linear viscoelastic fluids// Journal of Applied Mathematics. — 2005. — Vol. 25, no. 8. — P. 59–80.

43 Осколков, А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А.П. Осколков //Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 98–136.

44 Oskolkov A.P. Initial boundary-value problems with a free surface condition for the modified Navier-Stokes equations//J. Math.Sci. — 1997. — Vol. 84, no. 1. — P. 873–887.

45 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Kelvin-Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping//J. Math. Anal. Appl. —

2019. — Vol. 473. — P. 1122–1154.

46 Yushkov E.V. On the blow-up of a solution of a non-local system of equations of hydrodynamic type//Izv. Math. — 2012. —Vol. 76, no. 1. —P.190–213.

47 Levant B., Ramosa F., Titi E.S. On the statistical properties of the 3D incompressible Navier-Stokes-Voigt model//Commun. Math. Sci. —2010. —no.1. —P.277–293.

48 Bulîček M., Rajagopal K.R. On Kelvin-Voigt model and its generalizations//Evolution Equations and Control Theory. — 2012. —no.1. —P. 17–42.

49 Kalantarov V. K., Levant B., Titi E.S. Gevrey regularity for the attractor of the 3D Navier- Stoke-Voight equations//J. NonlinearSci. — 2009. —no. 19. — P. 133–152.

50 Ramos F., Titi E.S. Invariant measures for the 3D Navier-Stokes-Voigt equations and their Navier-Stokes limit//Discrete Contin. Dyn.Syst. — 2010. —no. 1. —P. 375–403.

51 Abylkairov U.U., Khompysh Kh. An inverse problem of identifying the coefficient in Kelvin- Voight equations//Applied Mathematical Sciences. — 2015. —Vol. 9. — Pp. 5079–5088.

52 Kumar P., Kinra K., Mohan M.T. A local in time existence and uniqueness result of an inverse problem for the Kelvin-Voigt fluids//arXiv:2103.14448v1. —2021.

53 Fedorov V.E., Urasaeva A.V. An inverse problem for linear Sobolev type equation//Journal of Inverse and Ill-posed Problems. —2004. —Vol. 12. — P. 387–395.

54 Fedorov V.E., Ivanova N.D. Inverse problem for Oskolkov's system of equations//Mathematical Methods in the Applied Sciences.— 2017. — Vol. 40, no. 17. — P. 6123–6126.

55 Antontsev S.N., Khompysh Kh. An inverse problem for generalized Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term//Inverse Problems. —2021. —Vol. 37.

56 Khompysh Kh. Identification of right hand side nonlinear Kelvin-Voigt equations //Vestnik KazNPU after Abay. —2016. —Vol. 4. — P.123–131.

57 Khompysh Kh., Kenzhebai Kh. An inverse problem for Kelvin–Voigt equations perturbedby isotropic diffusion and damping//Math. Meth. in the App. Sci. — 2022. — Vol. 7. — P. 3817–3842.

58 Khompysh, Kh. Solvability of the initial-boundary value problem of thermal convection with the slip condition for the equations of the Kelvin-Voigt fluid//Vestnik KazNTU im. K.I. Satpayev, scientific journal.— 2010. — Vol. 2. — P. 178–182.

59 Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S. Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics — Basel: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 48,Birkhauser, 2002.

60 Barret J.W., Liu W.B. Finite element approximation of the parabolic p-Laplacian // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1994. — Vol. 31, no. 2. — P. 413–428.

61 Maz'ya V. Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations. — Heidelberg: Springer, 2011.

62 Lu B., Shi X., Zhong X. Compact sets in the space L p (0, T; B)//Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — Vol. 146, no. 4. — P. 65–96.

63 Galdi G.P. An introduction to the Mathematical Theory of the NavierStokes Equations.Steady-State Problems. — New York: Springer, 2011.

64 Barnes H.A. A Handbook Of Elementary Rheology..A. Barnes. — Aberystwyth: Cambrian Printers, 2000.

65 Khompysh Kh., Nugymanova N.K. Inverse Problem For Integro-Differential Kelvin-VoigtEquation//Journal of Inverse and Ill- Posed Problems. — 2022.

66 Khompysh, Kh. Inverse problem with integral overdetermination for system of equations of Kelvin-Voight fluids//Advanced Materials Research. — 2013. — Vol. 705. — Pp. 15–20.

67 Chebotarev A.Y. Determination of the right-hand side of the Navier-

Stokes system of equations and inverse problems for the thermal convection equations//Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 51, no. 12. — P. 2146–2154.

68 Fan J., Di Cristo M., Jiang Y., Nakamura G. Inverse viscosity problem for the Navier–Stokes equation//Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 365, no. 2. — P. 750–757.

69 Jiang Y., Fan J., Nagayasu S., Nakamura G. Local solvability of an inverse problem to the Navier-Stokes equation with memory term//Inverse Problems.— 2020.

70 Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity//Nonlinearity. — 2021. — Vol. 34. — P. 3083–3111.

71 Ladyzhenskaya O.A. On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers//Journal of Mathematical Sciences. —2000.—Vol. 99. — P. 888–897.

72 Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II. — Moscow: Nauka, 1970.

73 Khompysh Kh., Shakir A.G. Inverse problems for Kelvin-Voigt system with memory: global existence and uniqueness //Lobachevskii journal of mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 10. — P. 4341–4352.

74 Khompysh Kh., Shakir A.G. Time dependent inverse source problems for integro- differential Kelvin-Voigt system//Trends in Mathematics Series: Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center. —2023.

75 Asanov A., Atamanov E.R. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations. — Berlin: De Gruyter, 1997.

76 Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. — Berlin: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 15. Walter de Gruyter Co., 2011.

77 Ting T.W. Certain nonsteady flows of second-order fluids//Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1963. — Vol. 14. — P. 1–26.

78 Barenblatt G., Zheltov I., Kochina I. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks//Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1960. — Vol. 24. — P. 1286–1303.

79 Баренблатт Г.И., Жентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — Москва: Недра, 1972.

80 Huilgol R. A second order fluid of the differential type//International Journal of Non-Linear Mechanics. — 1968. — Vol. 3. — P. 471–482.

81 Favini A., Lorenzi A. Differential Equations, Inverse and Direct Problems. — New York: Taylor and Francis Group, 2006.

82 Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. — New-York-Berlin-Heidelberg: Springer, 1998.

83 Аблабеков Б.С. Обратные заадчи для псевдопараболического уравне-ния. — Бишкек: Илим, 2001.

84 Kozhanov A.I. On the solvability of inverse coefficient problems for some Sobolev-type equations//Belgorod State University Scientific Bulletin. — 2010. — Vol. 18, no. 5. — P. 88–97.

85 Khompysh Kh. Inverse problem with integral overdetermination for system of equations of Kelvin-Voight fluids//Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — Vol. 216. — P. 382–387.

86 Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudoparabolic integrodifferentialoperator equations //Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 1997. — Vol. 5. — P. 235–253.

87 Lyubanova A.Sh., Tani A. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity//Applicable Analysis. — 2011. — Vol. 90. — P. 1557–1568.

88 Lyubanova A.Sh., Velisevich A.V. Inverse problems for the stationary and pseudoparabolicequations of diffusion//Applicable Analysis.— 2019. — Vol. 98. — P. 1997–201.

89 Antontsev S.N., Aitzhanova S.E., Ashurova G.R. An inverse problem for the pseudo-parabolic equation with p-Laplacian//Evolution equation and control

theory. — 2022. — Vol. 11, no. 2. — P. 399–414.

90 Yaman M. Blow-up solution and stability to an inverse problem fora pseudo-parabolic equation//Journal of Inequalities and Applications. — 2012. — Vol. 2012. — P. 1–8.

91 Brezis H. Analyse fonctionnelle. — Paris: Masson, 1983.

92 Lu B., Shi X., Zhong X. Global existence and large time asymptotic behavior of strong solutions to the Cauchy problem of 2D density-dependent Navier-Stokes equationswith vacuum//Comm. Part. Diff. Equations. — 1984. — Vol. 28, no. 5-6. — P. 1183–1201.

93 Constantin P., Foias C. Navier-Stokes equations. — Chicago: The University of Chicago Press, 1988.

94 Antontsev S.N., de Oliveira H.B. Cauchy problem for the Navier-Stokes-Voigt model governing nonhomogeneous flows//Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM. — 2022. — Vol. 116, no. 4.

95 Ladyzenskaya O.A., Solonnikov V.A. Unique solvability of an initial-and boundary-value problem for viscous incompressible nonhomogeneous fluids//J. Soviet Math. — 1978. — Vol. 9. — P. 697–749.

96 Di Perna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces//Invent. Math. — 1989. — Vol. 98, no. 3. — P. 511–547.

97 Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume 1: Incompressible Models. — Oxford: Clarendon Press, 1996.

98 Desjardins B. Global existence results for the incompressible density-dependent Navier-Stokes equations in the whole space//Differential Integral Equations. — 1997. — Vol. 10, no. 3. — P. 587–598.

99 Shakir A., Kabidoldanova A., Khompysh Kh. Solvability of a nonlinear inverse problem for a pseudoparabolic equation with p-Laplacian//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. —2021. —Vol.110, no. 2. — P. 35–46.

100 Khompysh Kh., Shakir A. An inverse source problem for a nonlinear pseudoparabolic equation with p-Laplacian diffusion and damping term//Quaestiones Mathematicae. — 2022. — Vol. 46, no. 9. — P. 1889– 1914.

101 Shakir A. Blow-up of solutions the integro-differential Kelvin-Voigt equation//Bulletin of Physics and Mathematical Sciences. — 2022.— Vol. 79, no. 3. — P. 46–52.

102 Shakir A. Global solvability of inverse problem for linear Kelvin-Voigt equations with memory//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2023. — Vol. 118, no. 2. — P. 30–41.

103 Be Oliveira H.B., Khompysh Kh., Shakir A. Strong solutions for the Navier-Stokes-Voigt equations with non-negative density. — 2023.

104 Khompysh Kh., Kabidoldanova A., Shakir A. Inverse problems for nonlinear Navier-Stokes-Voigt systemwith memory//Chaos, solitonsand fractals.— 2023. Vol. 177

105 Khompysh Kh., Shakir A. Inverse problem for Kelvin-Voigt equations with memory//Materials of the conference:Inverse and ill-posed problems in natural sciences. — Almaty: 2023. — 4. — P. 23.

106 Khompysh Kh., Shakir A. Inverse problem for pseudoparabolic equations with p- Laplacian//Materials of the conference: Traditional international April scientific conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. — Almaty: 2021. — 4. — P. 91.

107 Khompysh Kh., Shakir A. An inverse problem for pseudoparabolic equations with p- Laplacian//Materials of the conference: Problems of modern mathematics and its applications. — Bishkek — Issyk-Kul: 2021. — 6.— P. 84.

108 Khompysh Kh., Shakir A. Inverse problem for Kelvin-Voigt equations with memory//Materials of the conference:Traditional international April scientific conference in honor of the Day of Science Workers of the Republicof Kazakhstan. — Almaty: 2023. — 4. — P. 138.